¿Eres mi semejante?

Cuántas veces nos hemos parado a pensar, ¡esas dos personas mira que se parecen, casi son igualitas! De igual manera, cuando hemos visto objetos muy parecidos hemos exclamado ¡casi son idénticos!
En esta unidad vamos a estudiar algo que se aproxima a estos pensamientos, con la diferencia que veremos cosas iguales y proporcionales, es decir, la semejanza.
¡Adelante!

Módulo III

Bloque III

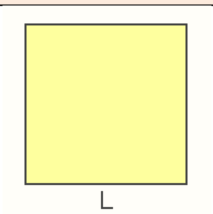
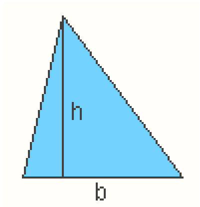
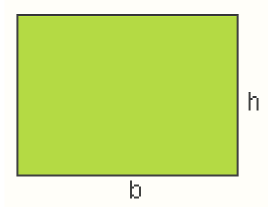
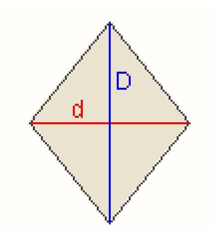
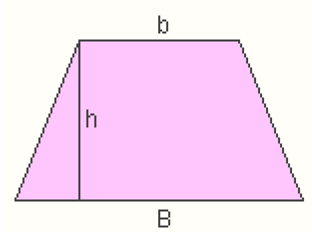
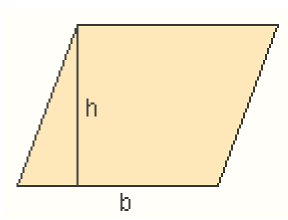
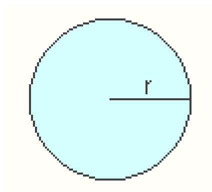
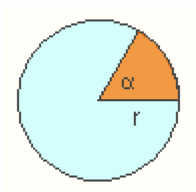
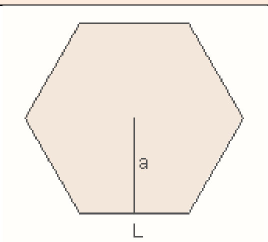
Unidad 6

Índice

1. Áreas de figuras planas

Antes de comenzar esta unidad debes recordar las áreas de las figuras planas vistas en una unidad anterior ya que se te serán de mucha utilidad ahora.

Recordatorio:

Cuadrado	***Triángulo***	***Rectángulo***
		
$S = l \cdot l = l^2$	$S = \frac{b \cdot a}{2}$	$S = b \cdot h$
Rombo	***Trapecio***	***Paralelogramo***
		
$S = \frac{D \cdot d}{2}$	$S = \frac{B + b}{2} \cdot 2$	$S = b \cdot h$
Círculo	***Sector circular***	***Polígono regular***
		
$S = \pi r^2$	$S = \frac{\pi r^2 \cdot \propto}{360}$	$S = \frac{P \cdot a}{2}$
	$\propto$= *ángulo del sector*	***P*** = *perímetro a = apotema*

Imágenes: Matemáticas y Tecnología. Gobierno de Aragón

2. Semejanza

Cuando hablamos de semejanza nos estamos refiriendo a dos cosas de igual forma pero de diferente tamaño. Por ejemplo podemos ver una fotografía aérea de un pueblo que se corresponde exactamente con el pueblo pero a distinto tamaño: en la fotografía podemos verlo entero y en la realidad no. Como podrás observar, estos dos objetos tienen una relación entre ellos, es decir, una **relación de proporcionalidad**. Así pues, llamamos **razón** al cociente entre los valores de dos magnitudes relacionadas entre sí. Y una **proporción** es la igualdad de dos razones.

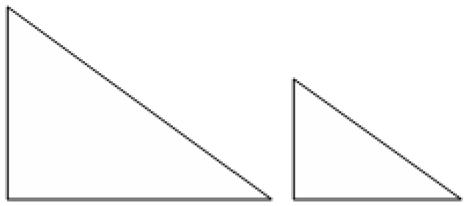


Imagen: Figuras semejantes

2.1 Teorema de Tales

El matemático griego, Tales, estudiando geometría en un triángulo estableció su teorema que dice: *"una línea paralela a un lado cualquiera de un triángulo genera un triángulo semejante al primero, esto es, con ángulos iguales y lados proporcionales".* Si se generaliza, obtenemos que: *"cuando dos rectas secantes son cortadas por rectas paralelas, todos los segmentos definidos por los puntos de corte son proporcionales a los segmentos homólogos".*

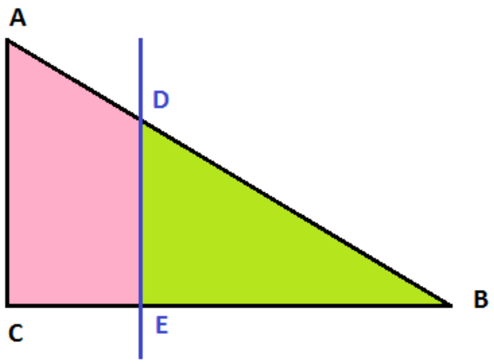


Imagen: Teorema de Tales

Si nos fijamos en el triángulo grande ABC, al trazar una paralela (azul) al lado AC, obtenemos otro triángulo, el DBE que tiene ángulos iguales y los lados son proporcionales al primero. Establecemos que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{EB}}$$

Ejemplo:

En esta imagen vemos a dos rectas secantes cortadas por tres rectas paralelas que dan lugar a varios segmentos.

Gracias al teorema de Tales sabemos que los segmentos obtenidos son proporcionales, así que:

$$\frac{5}{4{,}8} = \frac{6}{x}$$

Despejo la x.

$$5x = 4{,}8 \bullet 6$$

$$5x = 28{,}8$$

$$x = \frac{28{,}8}{5} = 5{,}76$$

Y obtengo el valor del segmento

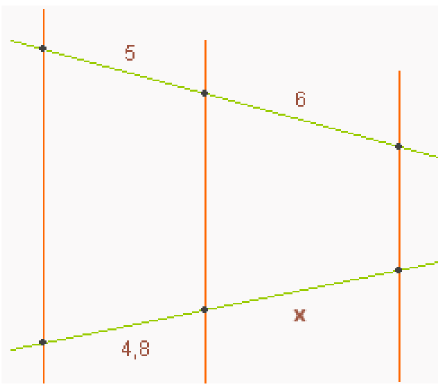


Imagen: Matemáticas y Tecnología. Gobierno de Aragón

Ejemplo:

En esta imagen vemos a un muro de una altura considerable que proyecta una sombra de 20 m.. Colocamos un poste de 2 m. que en el mismo instante proyecta una sombra de 3 m,.
Gracias al teorema de Tales sabemos que los dos triángulos formados $\widehat{ABC}$ y $\widehat{ADE}$ son semejantes y por tanto los lados proporcionales.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}\ ;\ \frac{20}{3} = \frac{h}{2}$$

Despejo la x.

$$40 = 3 \bullet h$$

$$h = \frac{40}{3} = 13{,}33\ m.$$

Y obtengo el valor del muro.

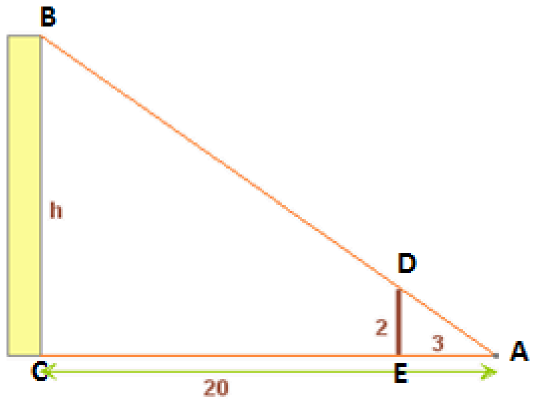
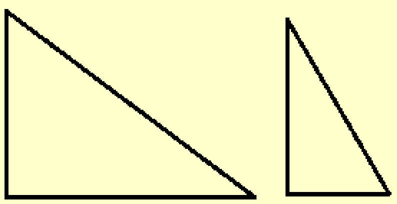


Imagen: Matemáticas y Tecnología. Gobierno de Aragón

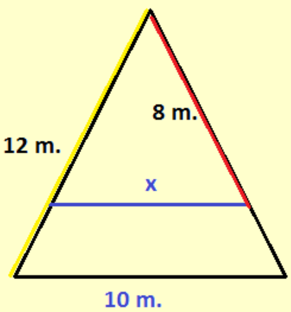
Practica:

1. **Responde a estas preguntas:**

a) ¿Son semejantes estas dos figuras?



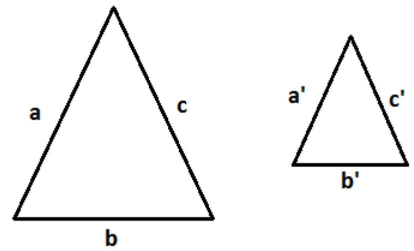
b) En este triángulo isósceles, calcula el valor del lado x.



Como dijimos al principio, dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma y diferente tamaño como cuando nos hacen una ampliación de una fotografía (las imágenes son las mismas pero una más grande que la otra). En el caso de figuras geométricas diremos que son semejantes cuando tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales.

Si dos figuras geométricas son proporcionales, quiere decir que la **razón (k)** entre los lados homólogos de las dos figuras es la misma para cualquier par de lados.

Observa la siguiente imagen:

	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$

Y a esa razón (k) la llamaremos **razón de semejanza**.

Ejemplo:

Tengo dos imágenes semejantes, la mayor de 10 x 4 cm, y la menor de 5 x 2 cm.

Si dividimos los lados homólogos:

$$\frac{10}{5} = \frac{4}{2} = 2$$

La razón de semejanza **k = 2**.

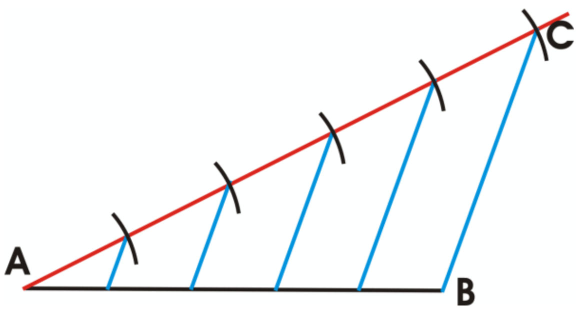
Esto quiere decir que una imagen es el doble de la otra, cosa que ya sabíamos viendo tan solo sus medidas.

Imágenes. INTEF

2.2 Aplicaciones del teorema de Tales

Algunas de las aplicaciones más utilizadas son:

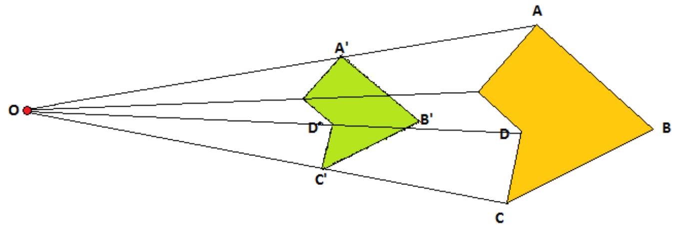
- ***División de un segmento en partes iguales***



Para dividir el segmento AB en partes iguales, lo primero que hacemos es trazar una semirrecta con origen en A (color rojo) con un cierto ángulo respecto del segmento.

Con ayuda del compás, tomamos una media y trazamos tantas divisiones sobre la semirrecta como partes queramos dividir al segmento (5 en nuestro caso). Seguidamente unimos el extremo del segmento dado con el final de la última división y trazamos paralelas a esta línea de color azul por cada una de las partes señaladas con el compás, Y así tenemos dividido el segmento en partes iguales.

- ***Dibujar figuras semejantes***



Para dibujar una figura semejante a otra, marcamos un punto externo y tiramos líneas desde ese punto a los vértices de la figura. Después trazamos segmentos paralelos a los lados de la figura hasta tocar con las líneas de trazo discontinuo. Y listo, nueva figura semejante.

- ***Las escalas***

Cuando queremos hacernos una idea de qué tamaño tiene un determinado lugar o de una vivienda por ejemplo, miramos un plano, que no es más que la representación a escala de ese lugar o vivienda. Por tanto, la **escala** es la relación que existe entre la medida real y la del plano y se representa por ***1 : x*** donde x es la razón de semejanza.

Ejemplo:

El plano de una vivienda está realizado a escala 1:50, quiere decir que por cada unidad que midas en el plano (centímetro por ejemplo), le corresponde 50 unidades en la realidad (50 centímetros).

Ejemplo:

Un mapa está realizado a escala ***1:25.000*** y la medida entre dos puntos en el plano es de 12 cm. ¿Cuál será la distancia real entre ambos puntos?

$$\frac{1}{25000} = \frac{12}{x}$$

$$1 \bullet x = 12 \bullet 25000$$

$$x = 300.000\ cm = 3.000\ m$$

Ejemplo:

Una maqueta de un coche está realizada a ***1:25***. Si el largo del coche en la realidad es de 4 metros, ¿cuánto medirá en la maqueta?

$$\frac{1}{25} = \frac{x}{4}$$

$$4 \bullet 1 = 25 \bullet \mathrm{x}$$

$$x = 0{,}16\ m = 16\ cm$$

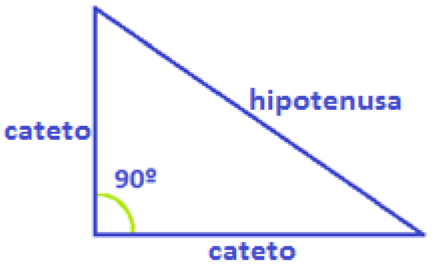
Practica:

2. **Responde a estas preguntas:**

a) En un mapa de España realizado a escala ***1:1.000.000*** mido la distancia entre dos ciudades obteniendo 8 cm. ¿Cuál será la distancia real?

b) El plano de una vivienda está realizado a ***1:50***. Si la fachada en la realidad tiene 10 m. ¿Cuántos centímetros serán en el plano?

3. El triángulo rectángulo



Recordatorio: *Como ya sabes, un triángulo rectángulo es aquél que <u>tiene un ángulo recto (90º).</u> Los lados reciben nombres específicos: el más largo es la <u>hipotenusa</u> y los otros dos se denominan <u>catetos</u>*

3.1 Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras dice que: *"en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".*

$$a^2 = b^2 + c^2$$

a = hipotenusa b y c = catetos

Para que lo comprendas mejor, tienes un gráfico a la derecha en donde la hipotenusa (5) al cuadrado es el área de ese cuadrado (25). Lo mismo sucede para los dos catetos de medidas 3 y 4, por lo que la suma de las áreas de sus cuadrados es: 16 + 9 = 25.

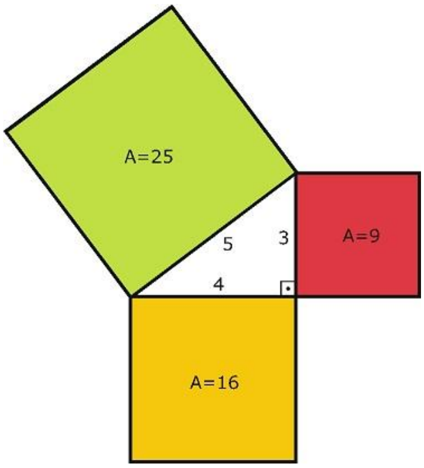


Imagen: INTEF

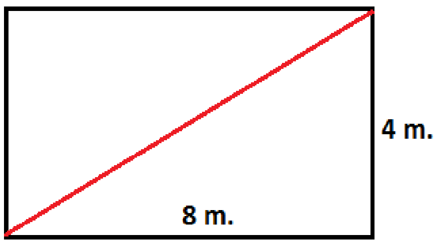
El teorema de Pitágoras se utiliza muchísimo en matemáticas para la resolución de problemas. También en la vida cotidiana su uso es alto, como por ejemplo en la construcción de edificios para "sacar" las esquinas.

Ejemplo:

Calcula la diagonal de este rectángulo:

Se nos forma un triángulo rectángulo por lo que podemos aplicar el teorema de Pitágoras.
Tenemos el valor de los dos catetos y nos piden por el de la diagonal. Así pues:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a^2 = 8^2 + 4^2$$
$$a^2 = 64 + 16$$
$$a^2 = 80$$
$$a = \sqrt{80}$$
$$a = 8{,}94\ m$$



Ejemplo:

Calcula el área de este triángulo isósceles:

Para calcular el área del triángulo debo conocer la base y la altura del mismo. La base son 8 m. pero al altura no la conozco. Observo que se nos forma un triángulo rectángulo entre el lado mayor, la mitad de la base y la altura por lo que podemos aplicar el teorema de Pitágoras.

Tenemos el valor de la hipotenusa (12 m.) y el del cateto inferior (4 m.) –la mitad de la base- por lo que debemos hallar el otro cateto.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Despejo el cateto

$$a^2 - c^2 = b^2$$

$$12^2 - 4^2 = b^2$$

$$144 - 16 = b^2$$

$$128 = b^2$$

$$\sqrt{128} = b$$

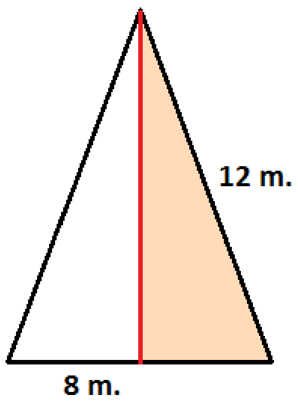
$b = 11{,}31\ m.$ que es la altura

Ahora puedo calcular el área o superficie del triángulo al tener todos los datos

$$S = \frac{base \bullet\ altura}{2}$$

$$S = \frac{4\ \bullet 11{,}31}{2} = 45{,}24\ m^2$$

$$\boldsymbol{S = 45{,}24\ m^2}$$



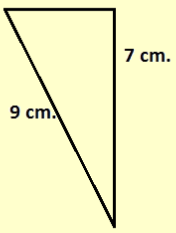
Practica:

3. **Resuelve:**

a) Calcula la diagonal de un cuadrado que tiene 5 metros de lado

b) Halla el área de un rombo que mide 5 m. de lado y la diagonal mayor tiene 8 metros.

c) Calcula el valor del lado que falta



Glosario

Razón: es el cociente entre los valores de dos magnitudes relacionadas entre sí.

Proporción: es la igualdad de dos razones.

Teorema de Tales: dice que **"**una línea paralela a un lado cualquiera de un triángulo genera un triángulo semejante al primero, esto es, con ángulos iguales y lados proporcionales".

Teorema de Pitágoras: dice que **"**en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

Actividades

Actividad 1:

A la misma hora que un árbol de 4 m de altura proyecta una sombra de 2,5 metros, la sombra de una torre mide 10 m. ¿Qué altura tiene la torre?

Actividad 2:

Madrid y Segovia están separadas por 90 km. ¿Cuántos centímetros estarán separadas en un mapa de escala ***1:2.000.000***?

Actividad 3:

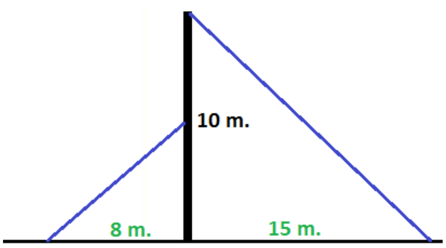
La plaza circular del pueblo tiene un radio de 15 metros y en el plano mide 4 cm. ¿Cuál será la escala de dicho plano?

Actividad 4:

Para sujetar un poste de 10 m, se emplean dos vientos de alambre duro colocados uno en su extremo y otro a la mitad como se ve en la figura.

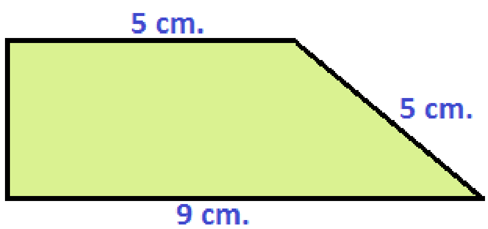
a) ¿Cuánto alambre nos hará falta para sujetar el poste?

b) Si en su instalación se estropea la décima parte, ¿cuánto necesitaremos de verdad?

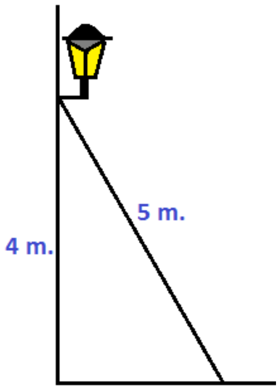


Actividad 5:

Calcula el área o superficie de esta figura.



Actividad 6:



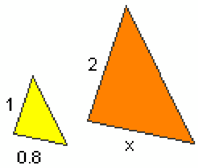
Para reponer la bombilla fundida de una farola de la calle tenemos una escalera de 5 metros de larga. Si la farola está situada a 4 m. del suelo, ¿Cuánto debemos separar la escalera de la pared para que llegue justo a la base de la farola?

Actividad 7:

Divide en 7 partes iguales este segmento:

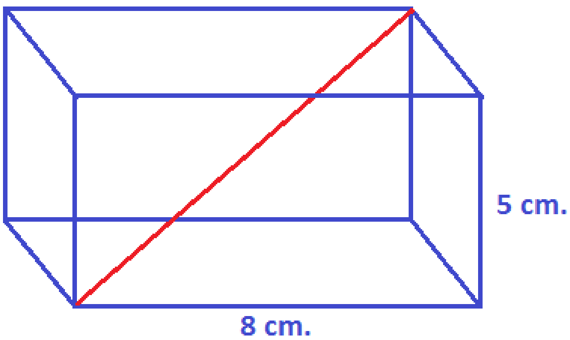
Actividad 8:

Calcula el valor de la **x**.



Actividad 9:

¿Sabrías calcular el valor de la línea roja?



Soluciones a los practica

Practica 1

a) No

b)

$$\frac{10}{x} = \frac{12}{8}$$

$$12 \bullet x = 80$$

$$x = \frac{80}{12} = 6{,}66$$

Practica 2

a)

$$\frac{1}{1.000.000}=\frac{8}{x}$$

$$x=8.000.000\ cm.$$

$$x=80\ km.$$

b)

$$\frac{1}{50}=\frac{x}{10}$$

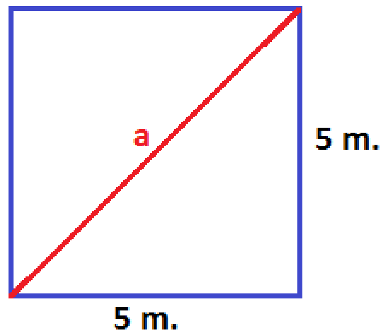
$$50x=10$$

$$x=\frac{10}{50}=0{,}2\ m.$$

$$x=20\ cm.$$

Practica 3

a)



Hay que calcular la hipotenusa

$$a^2=b^2+c^2$$

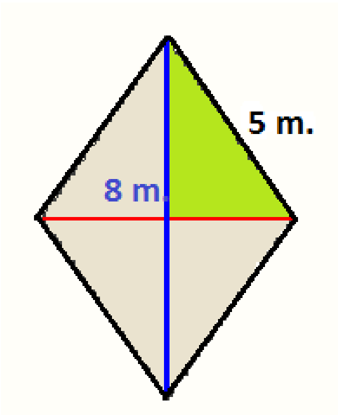
$$a^2=5^2+5^2$$

$$a^2=50$$

$$a=\sqrt{50}$$

$$a=\mathbf{7{,}07\ m.}$$

b)



1. Debemos conocer las diagonales:

D = 8 m. Para la diagonal menor nos fijamos en el triángulo rectángulo en el que vemos que la hipotenusa es 5 m., el cateto mayor es 4 m. (la mitad de la diagonal mayor) y nos falta el menor. Aplicamos el teorema de Pitágoras

$$a^2=b^2+c^2$$

Despejo el cateto:

$$b^2=a^2-c^2$$

$$b^2=5^2-4^2$$

$$b^2=25-16$$

$$b^2=9$$

$$b=\sqrt{9}=3m.$$

Por lo tanto, la diagonal menor será: d = 6 m.

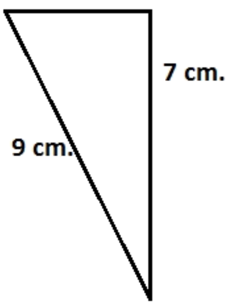
2. Calculamos la superficie del rombo:

$$S=\frac{D\bullet d}{2}$$

$$S=\frac{8\bullet 6}{2}$$

$$S=\frac{48}{2}=\mathbf{24\ m^2}$$

c)



Nos falta por conocer el cateto menor. Aplicamos el teorema de Pitágoras

$$b^2=a^2-c^2$$

$$b^2=9^2-7^2$$

$$b^2=81-49$$

$$b^2=32$$

$$b=\sqrt{32}=\mathbf{5{,}65\ cm.}$$

Bibliografía

- Gobierno de Aragón. Matemáticas y Tecnología, módulo 3. Educación Secundaria para Personas Adultas. España. Gobierno de Aragón. 2011. 134 p.
- Web: http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/ INTEF (Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y Formación del Profesorado).
- Web: http://matematicasesomj.blogspot.com.es/p/segunda-evaluacion.html