Ámbito Científico-Tecnológico | Módulo III | Bloque 3 | Unidad 2

Cuanto más, mejor y viceversa

Seguro que alguna vez has tenido en tus manos algún cuadernillo de pasatiempos o has realizado algún test psicotécnico en el que te han pedido que digas un número de la serie. Tras dar vueltas a la cabeza, y con un poco de lógica, lo has sacado. En esta unidad trataremos de esas cosas y algo más, así que manos a la obra y
¡Adelante!

Módulo III

Unidad 2

Índice

1. Sucesiones

Llamamos **sucesión** a un conjunto de números ordenados según un criterio. A cada uno de esos números se les denomina **términos** y se les suele designar con una letra y un subíndice; éste indica el lugar que ocupa el término en la sucesión.

Ejemplos:

1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	…
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	…

2,	4,	8,	16,	32,	64,	128,	256,	512,	…
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	…

- ***Término general***

El **término general** de una sucesión es una expresión que nos va a permitir obtener un término cualquiera de la sucesión con tan sólo conocer su lugar en ella. Se representa por $\mathbf{a_n}$.

Ejemplos:

En la primera sucesión, si nos fijamos en los diferentes términos, vemos que cualquiera de ellos, excepto el primero, se obtiene multiplicando por 2 la posición que ocupa y restando 1.

El 5; posición que ocupa: 3ª por tanto: $5 = 2 \bullet 3 - 1$

El 11; posición que ocupa: 6ª por tanto: $11 = 2 \bullet 6 - 1$

El término general será: $\boldsymbol{a_n = 2n - 1}$

En la segunda sucesión, cada término resulta de elevar el 2 al exponente del lugar que ocupa.

El 8; posición que ocupa: 3ª por tanto: $2^3 = 8$

El 256; posición que ocupa: 8ª por tanto: $2^8 = 256$

Así, el término general será: $\boldsymbol{a_n = 2^n}$

Una vez que conocemos el término general podemos calcular cualquier término de la sucesión. Así, si en el primero de los ejemplos quiero saber el valor del término que ocupa la vigésima posición, no tengo más que aplicar la expresión del término general.

$$\boldsymbol{a_n = 2n - 1} \qquad \boldsymbol{a_{20} = 2 \bullet 20 - 1 = 40 - 1 = 39} \qquad \boldsymbol{a_{20} = 39}$$

Hay ocasiones en las que no podremos encontrar el término general.

1.1 Sucesiones recurrentes

Diremos que estamos ante una **sucesión recurrente** cuando cada término se obtiene a partir de los anteriores.

Ejemplo:

Hagamos una sucesión que cada término sea la suma de los dos anteriores siendo el $a_1=1$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	…
1	*1*	*1+1=2*	*2+1=3*	*2+3=5*	*3+5=8*	*5+8=13*	*8+13=21*	*13+21=34*	…
1	1	2	3	5	8	13	21	34	…

Practica:

1 Resuelve

a) Escribe varios términos de una sucesión en la que el primero es 1 y el resto se obtiene sumando 5 al anterior.

b) Escribe varios términos de una sucesión en la que el primero es 20 y el resto se calcula restando del primero la posición que ocupa.

c) Escribe el término general de esta sucesión: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, …

d) En la sucesión del apartado b), escribe el término 15.

e) Escribe el término general de esta sucesión: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ….

f) Calcula los cinco primeros términos de esta sucesión: $a_{n=}\frac{n}{n+1}$

2. Progresiones

2.1 Progresiones aritméticas

Una **progresión aritmética** es una sucesión en que cada término (menos el primero) se obtiene sumando al anterior una cantidad fija **d**, llamada **diferencia**.

Pueden ocurrir dos casos: si d > 0, la sucesión va aumentando porque los números son cada vez más grandes. La sucesión es **creciente**. Y si d < 0, la sucesión disminuye porque los números son cada vez más pequeños. La sucesión es **decreciente**.

Ejemplo:

P. aritmética 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, … $a_1 = 1 \ y \ d = 3$

Para calcular el **término general** es sencillo ya que cada término es igual al anterior más la diferencia, así que: $\boldsymbol{a_n = a_1 + \ n - 1 \ \bullet d}$

Ejemplo:

a_1	
a_2	$a_2 = a_1 + d$
a_3	$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$
a_4	$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$
a_5	$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d$
a_6	$a_6 = a_1 + 5d$
a_7	$a_7 = a_1 + 6d$
………………………………	
a_n	$\boldsymbol{a_n = a_1 + \ n - 1 \ \bullet d}$

El segundo término es el 1º más la diferencia
El tercer término es el 2º más la diferencia
El cuarto término es el 3º más la diferencia
Y así sucesivamente

Por tanto, para el término general será el 1º más (n-1) veces la diferencia.

En el caso del ejemplo anterior:

Término general de: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, … $a_1 = 1 \ y \ d = 3$

$\boldsymbol{a_n = a_1 + \ n - 1 \ \bullet d}$ $\quad$ $\boldsymbol{a_n = 1 + \ n - 1 \ \bullet 3 = 1 + 3n - 3 = 3n - 2}$

De esta manera podemos calcular cualquier término de una progresión aritmética:

Seguimos con el ejemplo anterior:

En la progresión aritmética 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, … $a_1 = 1$ y $d = 3$

El término general es: $\boldsymbol{a_n = 3n - 2}$

Quiero conocer el **término número 20**:

$$\boldsymbol{a_{20} = 3 \bullet 20 - 2 = 60 - 2 = 58}$$

$$\boldsymbol{a_{20} = 58}$$

- ***Suma de los términos de una progresión aritmética***

Para sumar los términos de una progresión aritmética de un número finito de términos, se utiliza la expresión:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1 + a_n \quad \bullet n}{2}}$$

Ejemplo:

Sea la progresión aritmética: 5, 10, 15, 20, 25, 30

Si observas los números verás que se pueden asociar en pares cuya suma da siempre el mismo resultado (35).
Multiplicando 35 por el número de veces que se repite tendríamos el valor de la suma $\boldsymbol{35 \bullet 3 = 105}$.
En nuestro caso es fácil, pero si tuviéramos cientos de términos no podríamos hacerlo así.
Por tanto, sumamos el primero y el último y tenemos un par, multiplicamos por el número total de términos y dividimos entre dos (2) porque el par tiene dos números.
Con lo que obtenemos la expresión:

35

35

5, 10, 15, 20, 25, 30,

35

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1 + a_n \quad \bullet n}{2}}$$

Comprobémoslo aplicando la expresión de la suma:

$n = 6$ Seis términos

$a_1 = 5 \qquad a_6 = 30$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{5 + 30 \quad \bullet 6}{2}}$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{210}{2}}$$

$$\boldsymbol{S_n = 105}$$

Practica:

2 Resuelve

a) Calcula la diferencia en estas progresiones aritméticas:
1, 5, 9, 13, 17, 21, ….
8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, …

b) Escribe el término general de estas progresiones aritméticas:
1, 5, 9, 13, 17, 21, ….
8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, ….

c) Calcula la suma en esta progresión aritmética:
1, 5, 9, 13, 17, 21

d) Calcular la suma de los 10 primeros términos de la progresión aritmética:
2, 4, 6, 8,10,...

2.2 Progresiones geométricas

Una **progresión geométrica** es una sucesión en que cada término (menos el primero) se obtiene multiplicando al anterior una cantidad fija **r,** llamada **razón**. Ésta se obtiene al realizar el cociente entre dos términos consecutivos:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = r$$

Ejemplos:

1.- $a_1 = 1$ y $r = 3$ 1, 3, 9, 27, 81, 243, …

2.- $a_1 = 10$ y $r = \frac{1}{2}$ $10, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$

Para calcular el **término general** es sencillo ya que cada término es igual al anterior multiplicado por la razón, así que: $\boldsymbol{a_n = a_1 \bullet r^{n-1}}$

Ejemplo:

a_1		
a_2	$a_2 = a_1 \bullet r$	El segundo término es el 1º por la razón
a_3	$a_3 = a_2 \bullet r = a_1 \bullet r \bullet r = a_1 \bullet r^2$	El tercer término es el 2º por la razón
a_4	$a_4 = a_3 \bullet r = a_1 \bullet r \bullet r \bullet r = a_1 \bullet r^3$	El cuarto término es el 3º por la razón
a_5	$a_5 = a_4 \bullet r = a_1 \bullet r \bullet r \bullet r \bullet r = a_1 \bullet r^4$	Y así sucesivamente
a_6	$a_6 = a_1 \bullet r^5$	
a_7	$a_7 = a_1 \bullet r^6$	
....		
a_n	$\boldsymbol{a_n = a_1 \bullet r^{n-1}}$	Por tanto, para el término general será el 1º por la razón elevada (n-1) veces.

En los casos del ejemplo anterior, los términos generales serán:

1.- $\boldsymbol{a_n = a_1 \bullet r^{n-1}}$ $\boldsymbol{a_n = 1 \bullet 3^{n-1}}$

2.- $\boldsymbol{a_n = a_1 \bullet r^{n-1}}$ $\boldsymbol{a_n = 10 \bullet \frac{1}{2}^{\,n-1}}$

De esta manera podemos calcular cualquier término de una progresión geométrica:

En la progresión geométrica: 1, 3, 9, 27, 81, 243, … $a_1 = 1$ y $r = 3$ **el término general es:** $\boldsymbol{a_n = 1 \bullet 3^{n-1}}$

Quiero conocer el término número 10:

$$\boldsymbol{a_{10} = 1 \bullet 3^{10-1}}$$

$$\boldsymbol{a_{10} = 3^9 = 19.683}$$

- ***Suma de los términos de una progresión geométrica***

La suma de un número finito de términos de una progresión geométrica viene dada por la expresión:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1 \bullet \; r^n - 1}{r - 1}}$$

Ejemplo:

Sea la progresión geométrica: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128... …. $a_1 = 1$ y $r = 2$

Calculemos la suma de los 10 primeros términos. Cogemos la expresión correspondiente	$S_n = \frac{a_1 \cdot \; r^n - 1}{r - 1}$
Sustituimos las letras por sus valores	$S_n = \frac{1 \cdot \; 2^{10} - 1}{2 - 1}$
Hacemos las operaciones	$S_n = \frac{1 \cdot \; 1.024 - 1}{1}$
	$S_n = \frac{1.023}{1}$
La suma es	$S_n = 1.023$

- ***Producto de los términos de una progresión geométrica***

El producto de un número finito de términos de una progresión geométrica viene dado por la expresión:

$$P_n = \overline{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Ejemplo:

Sea la progresión geométrica: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. …. $a_1 = 1$ y $r = 2$

Calculemos el producto de los 6 primeros términos. Cogemos la expresión correspondiente	$P_n = \overline{(a_1 \cdot a_n)^n}$
Sustituimos las letras por sus valores. $a_n = a_6$ porque queremos conocer el producto de los 6 primeros términos $a_6 = 32$	$P_n = \overline{(1 \cdot 32)^6}$
Operamos	$P_n = \overline{(32)^6}$
	$P_n = \overline{1.073.741.824}$
El producto es	$S_n = 32.768$

Practica:

3 Resuelve

a) Calcula la razón en estas progresiones geométricas:
2, 6, 18, 54, 162, ….
512, 128, 32, 8, 2, …

b) Escribe el término general de estas progresiones geométricas:
2, 6, 18, 54, 162, ….
512, 128, 32, 8, 2, …

c) Calcular la suma de los 10 primeros términos de la progresión geométrica:
3, 6, 12, 24, 48, 96 .....

d) Calcular el producto de los 5 primeros términos de la progresión geométrica:
3, 6, 12, 24, 48, 96 .....

Glosario

Sucesión: es un conjunto de números ordenados según un criterio.

Términos: cada uno de los números de la sucesión.

Término general: es una expresión que nos va a permitir obtener un término cualquiera de la sucesión con tan sólo conocer su lugar en ella. Se representa por $\mathbf{a_n}$.

Sucesión recurrente: es una sucesión en la que cada término se obtiene a partir de los anteriores.

Progresión aritmética: es una sucesión en que cada término (menos el primero) se obtiene sumando al anterior una cantidad fija **d**, llamada **diferencia**.

Progresión geométrica: es una sucesión en que cada término (menos el primero) se obtiene multiplicando al anterior una cantidad fija **r,** llamada **razón**.

Actividades

Actividad 1

Halla tres términos de las siguientes sucesiones:

a) 100, 90, 80, 70, 60 , …
b) 51, 53, 55, 57, 59, …
c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ …

Actividad 2

Encuentra el término en estas sucesiones:

a) 15, 12, 9, , 3, 0, …
b) 1, 3, 9, 27, , 243, ….

Actividad 3

Calcula para cada sucesión los términos que se te piden:

a) Los seis primeros términos de $\boldsymbol{a_n = -2n - 2}$
b) Los diez primeros términos de $\boldsymbol{a_n = \frac{1}{2}n + 2}$

Actividad 4

Halla los términos generales de las siguientes progresiones aritméticas:

a) 5, 2, -1, -4, -7, …
b) -10, -5, 0, 5, 10, …

Actividad 5

Una asociación que realiza actividades para la comunidad inicia su andadura con 50 personas. Si todos los meses se incorporan 5 voluntarios, ¿cuántas personas tendrá la asociación al cabo de 3 años?

Actividad 6

Halla la suma de los 30 primeros términos de la progresión aritmética 23, 21, 19, 17, 15, 13, …

Actividad 7

Halla el término general de la progresión geométrica 2, 6, 18, 54, ….

Actividad 8

Halla la suma de los 20 primeros términos de la progresión geométrica 1, 2, 4, 8, 16, 32, …

Actividad 9

Calcula el producto de los 10 primeros términos de la progresión geométrica: 1, 2, 4, 8, 16, 32,

Actividad 10

Has decidido realizar una donación a la ONG de tu barrio de la siguiente forma: entregas 2 euros el primer mes, 4 euros el segundo, 8 euros el tercero y así sucesivamente. ¿Qué cantidad habrás entregado al cabo de dos años? ¿Eres generoso/a?

Soluciones a los practica:

Practica 1

a)1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, …

b) 20, 18, 17, 16, 15, 14, …

c) En la sucesión 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, … el término general es:

$$\boldsymbol{a_n = n^2}$$

Porque si te fijas en los términos de la sucesión verás que cada uno de ellos es el cuadrado de la posición que ocupa.

d)

$$a_{15} = 20 - 15 = 5$$

e) El término general de esta sucesión: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, …. es

$$\boldsymbol{a_n = 2n}$$

f)

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{2}{3} \quad a_3 = \frac{3}{4} \quad a_4 = \frac{4}{5} \quad a_5 = \frac{5}{6}$$

Practica 2

a) La diferencia en la progresión aritmética 1, 5, 9, 13, 17, 21, …. es

$$\boldsymbol{d = 5 - 1 = 4}$$

En la progresión aritmética 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, … es

$$\boldsymbol{d = 6 - 8 = -2}$$

b) El término general de la progresión aritmética 1, 5, 9, 13, 17, 21, …. es

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + \ n - 1 \ \bullet d}$$
$$\boldsymbol{a_n = 1 + \ n - 1 \ \bullet 4}$$
$$\boldsymbol{a_n = 1 + 4n - 4}$$
$$\boldsymbol{a_n = 4n - 3}$$

El término general de la progresión aritmética 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, … es

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + \ n - 1 \ \bullet d}$$
$$\boldsymbol{a_n = 8 + \ n - 1 \ \bullet \ -2}$$
$$\boldsymbol{a_n = 8 - 2n + 2}$$
$$\boldsymbol{a_n = -2n + 10}$$

c)La suma de la progresión aritmética 1, 5, 9, 13, 17, 21 es

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1 + a_n \quad \bullet n}{2}}$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{1 + 21 \quad \bullet 6}{2}}$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{22 \bullet 6}{2}}$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{132}{2}}$$

$$\boldsymbol{S_n = 66}$$

d) Vamos a calcular la suma de los 10 primeros términos de 2, 4, 6, 8,10,...
Calculamos la diferencia $\boldsymbol{d = 4 - 2 = 2}$
Ahora hallamos el término general

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + \quad n - 1 \quad \bullet d}$$

$$\boldsymbol{a_n = 2 + \quad n - 1 \quad \bullet 2}$$

$$\boldsymbol{a_n = 2 + 2n - 2}$$

$$\boldsymbol{a_n = 2n}$$

Sabiendo el término general, calculo el valor del término 10

$$\boldsymbol{a_n = 2n}$$

$$\boldsymbol{a_{10} = 2 \bullet 10 = 20}$$

Y por último hallamos la suma de los 10 primeros términos

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1 + a_n \quad \bullet n}{2}}$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{2 + 20 \quad \bullet 10}{2}}$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{22 \quad \bullet 10}{2}}$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{220}{2}}$$

$$\boldsymbol{S_n = 110}$$

Practica 3

a) Sea la progresión geométrica: 2, 6, 18, 54, 162, …

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = r = \frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \boldsymbol{3 = r}$$

Sea la progresión geométrica: 512, 128, 32, 8, 2, …

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = r = \frac{128}{512} = \frac{32}{128} = \boldsymbol{\frac{1}{4} = r}$$

b) La expresión del término general de la progresión geométrica: 2, 6, 18, 54, 162, … es:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 \bullet r^{n-1}}$$

$$\boldsymbol{a_n = 2 \bullet 3^{n-1}}$$

La expresión del término general de la progresión geométrica: 512, 128, 32, 8, 2, … es:

$$\boldsymbol{a_n = 512 \bullet \quad \frac{1}{4}^{\,n-1}}$$

c) La expresión de la suma de varios términos de una progresión geométrica es:

$$S_n = \frac{a_1 \bullet \quad r^n - 1}{r - 1}$$

Necesitamos saber la razón, así pues:

$$r = \frac{6}{3} = \boldsymbol{2}$$

Sustituimos en la expresión:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{3 \bullet \quad 2^{10} - 1}{2 - 1}}$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{3 \bullet \quad 1.024 - 1}{2 - 1}}$$

d) La expresión del producto de varios términos de una progresión geométrica es:

$$\boldsymbol{P_n = \quad \overline{(a_1 \bullet a_n)^n}}$$

Necesitamos saber la razón, por tanto:

$$r = \frac{6}{3} = \boldsymbol{2}$$

Necesitamos conocer también a_5

$$\boldsymbol{a_n = a_1 \bullet r^{n-1}}$$

$$\boldsymbol{a_5 = 3 \bullet 2^{5-1}}$$

$$\boldsymbol{a_5 = 3 \bullet 2^4 = 48}$$

Ahora sustituimos en la expresión:

$$\boldsymbol{P_n =} \quad \overline{(3 \bullet 48)^5}$$

$$S_n = \frac{\mathbf{3 \cdot 1.023}}{\mathbf{1}}$$

$$S_n = \mathbf{3.069}$$

$$P_n = \overline{(144)^5}$$

$$P_n = \overline{61.917.364.224}$$

$$P_n = \mathbf{248.832}$$

Bibliografía

- Gobierno de Aragón. Matemáticas y Tecnología, módulo 3. Educación Secundaria para Personas Adultas. España. Gobierno de Aragón. 2011. 134 p.
- Web: http://www.vitutor.com/index.html
- Web: http://www.cidead.es/ Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Madrid.