

¿Me tocará? ¿No me tocará?

Si jugamos al parchís, ¿sacaré un cinco para salir de casa? No lo sabemos, todo depende de la suerte o el azar.

¿Qué probabilidad tendré de sacar un cuatro para comer la ficha del contrincante?

Pues si te adentras en esta unidad empezarás a descubrir por qué sucede todo esto.

¡Adelante!

Módulo IV

Unidad 6

Índice

| | |
|---|-----------|
| 1. Concepto | 3 |
| 2. Experimentos aleatorios | 3 |
| 2.1. Espacio muestral..... | 3 |
| 2.2. Suceso..... | 4 |
| 3. La regla de Laplace | 5 |
| 3.1. Frecuencia y probabilidad | 7 |
| 4. Experimentos compuestos | 7 |
| 5. Probabilidad condicionada | 9 |
| Glosario | 11 |
| Actividades | 11 |
| Soluciones a los practica | 14 |
| Bibliografía recomendada | 15 |

1. Concepto

El diccionario de la Real Academia de la Lengua Española define la probabilidad desde el punto de vista matemático como “la razón entre el número de casos favorables y el número de casos posibles en un proceso aleatorio”.

¿Quién no sea confiado alguna vez a la suerte al comprar un décimo de lotería o al echar una primitiva? Y después, cuando se piensa serenamente, comprendemos que acertar con el décimo premiado es muy difícil; y no digamos nada de los números de la lotería primitiva. En definitiva, la **probabilidad** de que nos toque un premio es escasísima. Eso sí, no renunciamos ni a la suerte ni a los sueños. Estudiaremos aquí esa pequeña probabilidad de hacer realidad los sueños.



Imagen: [INTEF](#)

2. Experimentos aleatorios

Un **experimento aleatorio** es aquel que no es posible conocer previamente su resultado porque depende del azar. En caso contrario, estaríamos ante un **experimento determinista**.

Un experimento aleatorio tiene tres características:

1. El resultado no puede conocerse previamente.
2. Se puede realizar tantas veces como se quiera.
3. A medida que aumentamos las veces que se realiza el experimento, el cociente entre el número de veces que se produce un resultado y el número total de veces que se ha hecho el experimento, tiene un valor constante.

Ejemplos:

Si lanzamos una moneda no sabemos previamente si saldrá cara o cruz.

Si lanzamos un dado tampoco podemos determinar el resultado que vamos a obtener.

2.1 Espacio muestral

Son todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Se representa con la letra E y escrito entre llaves.

Ejemplo:

Si lanzamos un dado, el espacio muestral son todos los posibles resultados.

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2.2 Suceso

Es cada uno de los posibles resultados que podemos obtener en un experimento aleatorio. Por tanto, es una parte del espacio muestral.

Ejemplo:

Si lanzamos un dado, unos sucesos pueden ser:

$$A = \{1\} \quad B = \{5\} \quad C = \{3\} \quad D = \{1, 3\} \quad F = \{2, 4, 6\}$$

Un suceso es un posible resultado unitario o pueden ser varios.

- **Suceso elemental**

Se produce cuando el suceso solo tiene un elemento.

Ejemplo:

Si lanzamos un dado, un suceso elemental es sacar un 1: $A = \{1\}$ o sacar un 5: $B = \{5\}$

- **Suceso compuesto**

Se produce cuando está formado por más de un suceso elemental.

Ejemplo:

Si lanzamos un dado, un suceso compuesto será sacar número par 1: $A = \{2, 4, 6\}$ Como ves, está formado por varios sucesos elementales.

- **Suceso seguro**

Se produce cuando está formado por todos los sucesos elementales, esto es, coincide con el espacio muestral.

Ejemplo:

Si lanzamos un dado, un suceso seguro sería sacar menos de 7: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Como ves, está formado por todos los sucesos elementales.

- **Suceso imposible**

Es aquel que no puede darse nunca. Se representa por el símbolo de conjunto vacío. \emptyset

Ejemplo:

Si lanzamos un dado, un suceso imposible sería sacar un 7: $A = \{\emptyset\}$

- **Sucesos compatibles**

Son aquellos que tienen algún elemento en común.

Ejemplo:

Al lanzar un dado, tenemos estos dos sucesos:

$$A = \ll \text{extraer un número par} \gg = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \ll \text{extraer un número menor de 4} \gg = \{1, 2, 3\}$$

Ambos sucesos son compatibles porque tienen un elemento común, el 2.

- **Sucesos incompatibles**

Son aquellos que no tienen ningún elemento en común.

Ejemplo:

Al lanzar un dado, tenemos estos dos sucesos:

$$A = \ll \text{extraer un número par} \gg = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \ll \text{extraer el 1} \gg = \{1\}$$

Ambos sucesos son incompatibles porque no tienen elementos comunes.

- **Sucesos contrarios**

Dos sucesos son contrarios si son incompatibles y entre ambos contienen a todos los elementos del espacio muestral.

Ejemplo:

Al lanzar un dado, tenemos estos dos sucesos:

$A = \ll \text{extraer un número par} \gg = \{2, 4, 6\}$

$B = \ll \text{extraer un número impar} \gg = \{1, 3, 5\}$

Ambos sucesos son contrarios porque son incompatibles (no tienen elementos comunes) y además, entre ambos completan el espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Recordatorio:



Practica:

1. Tenemos una baraja de cartas española. Responde a estas preguntas

- Escribe tres sucesos elementales.
- ¿Qué tipo de suceso es $A = \ll \text{sacar un rey} \gg$?
- ¿Qué tipo de suceso es sacar el as de corazones?
- Escribe dos sucesos compatibles.
- ¿Cómo son estos dos sucesos?

$A = \ll \text{sacar una carta de oros} \gg$
 $B = \ll \text{sacar una carta que no sea oros} \gg$

3. La regla de Laplace

La regla de Laplace, para calcular la probabilidad de un suceso, dice que si realizamos un experimento aleatorio en el que hay un número de sucesos elementales, todos igualmente probables, **equiprobables**, la probabilidad de que ocurra el suceso A es:

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}$$

Ejemplos:

Vamos a calcular la probabilidad de sacar cara al lanzar una moneda:

$A = \ll \text{sacar cara al lanzar una moneda} \gg$

Caso favorable = cara

Casos totales = cara, cruz

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

Vamos a calcular la probabilidad de sacar dos caras al lanzar dos monedas:

$B = \ll \text{sacar dos caras al lanzar dos monedas} \gg$

Casos favorables = {cara, cara} = 1

Casos totales = {cara, cara ; cara, cruz ; cruz, cara ; cruz, cruz} = 4

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

Practica:

2. Lanzamos un dado. Calcula la probabilidad de:

- $A = \ll \text{extraer un número par} \gg$
- $B = \ll \text{extraer un 5} \gg$
- $C = \ll \text{extraer un número menor de 5} \gg$
- $D = \ll \text{extraer un número impar} \gg$
- $F = \ll \text{extraer un número mayor de 4} \gg$

Antes de continuar, vamos a ver algunos aspectos interesantes de la probabilidad que, seguramente que ya has descubierto:

- La probabilidad de todo suceso está comprendida entre 0 y 1. El 0 sería la probabilidad correspondiente al suceso imposible y 1, al suceso seguro.

Ejemplo: $A = \ll \text{sacar un 7 al lanzar un dado de 6 caras} \gg$

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{0}{6} = 0$$

Ejemplo: $B = \ll \text{sacar menos de 7 al lanzar un dado de 6 caras} \gg$

$$P(B) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{6}{6} = 1$$

- La probabilidad de que se produzcan dos sucesos incompatibles es la suma de las probabilidades de ambos sucesos.

Ejemplo: $A = \ll \text{sacar un número par al lanzar un dado de 6 caras} \gg$ y

$B = \ll \text{sacar el 1 al lanzar un dado de 6 caras} \gg$

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{1}{6}$$

La probabilidad conjunta de ambos sucesos sería:

$$\frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

3.1. Frecuencia y probabilidad

Como ya sabes por la unidad anterior, la frecuencia absoluta de un suceso es el número de veces que aparece cuando se repite un experimento aleatorio, y la frecuencia relativa es la frecuencia absoluta dividida por el número de veces que se repite el experimento aleatorio. Cuando el número que se repite el experimento aleatorio es muy grande, la frecuencia relativa con que aparece un suceso tiende a estabilizarse hacia un valor fijo. Este resultado, conocido como **ley de los grandes números**, permite definir la probabilidad de un suceso como ese número hacia el que se aproxima la frecuencia relativa al repetir el experimento muchas veces.

Ejemplo:

Lanzamos una moneda muchas veces, 100 por ejemplo y obtenemos estos resultados:

Cara: 55 veces; cruz: 45 veces.

Frecuencia absoluta de sacar cara

$$f_i = 55$$

Frecuencia relativa de sacar cara:

$$h_i = \frac{55}{100} = 0,55$$

Probabilidad de obtener cara:

$$P(\text{cara}) = \frac{1}{2} = 0,5$$

0,55 es la frecuencia relativa al realizar 100 veces el experimento. Si lo realizáramos más veces, veríamos que su valor se aproxima a **0,5**, que en definitiva es la probabilidad de obtener cara o cruz

Queda clara la relación existente entre la **probabilidad** y la **frecuencia**.

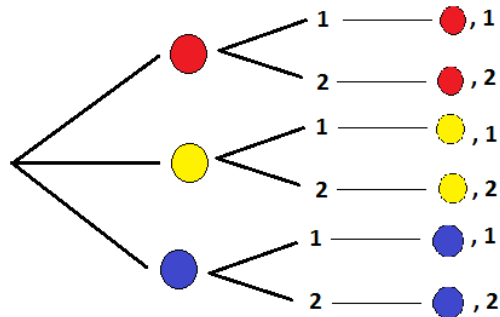
4. Experimentos compuestos

Un **experimento compuesto** es aquel que está formado por varios experimentos simples realizados de forma simultánea o consecutiva y los sucesos posibles son sucesos compuestos.

Para calcular el espacio muestral de un experimento compuesto **no** hay que hacer la suma de los espacios muestrales de los diferentes experimentos simples sino que conviene, en muchas ocasiones hacer un diagrama de árbol que represente todas las opciones. Cada resultado viene dado por un camino del diagrama.

Ejemplo:

Tenemos dos cajas, una con tres bolas de colores, rojo, amarillo y azul y en la segunda caja dos bolas numeradas del 1 al 2. Hagamos el diagrama de árbol correspondiente:

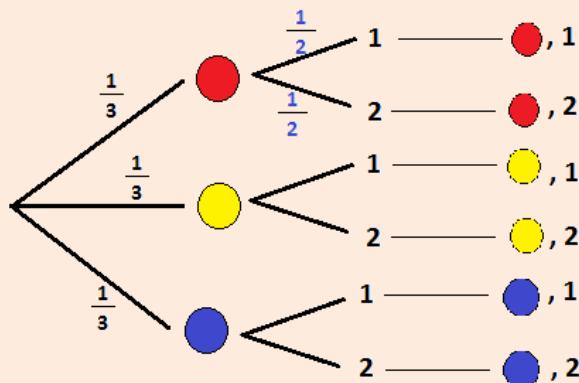


El espacio muestral de este experimento compuesto está formado por **seis** posibilidades como puedes ver en el diagrama de árbol. Saco una roja y la pueden corresponder el 1 o el 2. Y así sucesivamente con el resto de bolas.

Si ahora quisiéramos calcular la probabilidad de obtener bola roja y 2, efectuaríamos como ya sabemos:

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{1}{6}$$

Consejo:



Es conveniente que pongas en las barras del diagrama de árbol la probabilidad de obtener ese suceso ya que te facilitará mucho el cálculo posterior.

$$P(\text{roja}, 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{roja}, 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{amarilla}, 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{amarilla}, 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{azul}, 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{azul}, 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

La probabilidad de un suceso en un experimento compuesto es el **producto** de las probabilidades de los sucesos simples que lo forman

Ejemplo: continuando con nuestro ejemplo de las bolas, vemos que para sacar el par: , 1. Mirando la barra del gráfico sería $\frac{1}{3}$ por bola roja y $\frac{1}{2}$ por el 1.

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Ahora vamos a plantear diferentes situaciones que se nos pueden dar. Con un poco de vista y cuidado saldremos adelante.

- **Suceso compuesto en el que los sucesos simples son incompatibles**

Ejemplo:

Tenemos una baraja de cartas española en el que nos piden que calculemos la probabilidad de sacar o un cinco o una sota sin mirar.

OJO: no se trata de sacar dos cartas, UNA tan solo.

Los dos sucesos simples, sacar un 5 o una sota son incompatibles porque no hay ninguna carta que sea ambas cosas a la vez.

Cartas con el número 5, hay cuatro. Al igual que sotas. Cartas totales: 40. Veamos la probabilidad.



Imagen: [INTEF](#)

| | | |
|------------------------|--------------------------|--|
| $P(5) = \frac{4}{40}$ | $P(sota) = \frac{4}{40}$ | $P(5 \text{ ó sota})$ |
| $= \frac{1}{10} = 0,1$ | $= \frac{1}{10} = 0,1$ | $= \frac{4}{40} + \frac{4}{40} = \frac{8}{40}$ |
| | | $= 0,2$ |

- **Suceso compuesto en el que los sucesos simples son compatibles**

Ejemplo:

Tenemos una baraja de cartas española en el que nos piden que calculemos la probabilidad de sacar una figura o una carta deoros sin mirar.

OJO: no se trata de sacar dos cartas, UNA tan solo.

Ahora los dos sucesos simples, sacar una figura o una carta deoros son compatibles porque hay algunas cartas que son figuras y deoros a la vez. Cartas que son figuras, hay 12. Cartas que sonoros hay 10. Cartas que son figuras yoros a la vez, hay 3. Cartas totales: 40. Veamos la probabilidad.

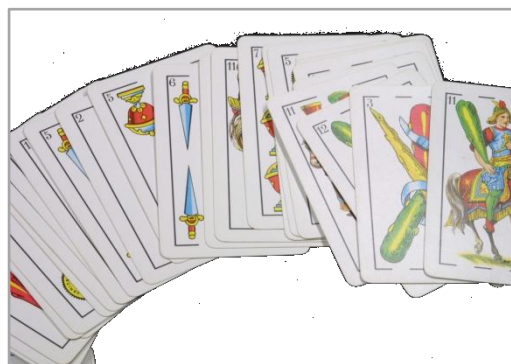


Imagen: [INTEF](#)

| | | |
|---|----------------------------------|---|
| $P(\text{figuras}) = \frac{12}{40}$ | $P(\text{oros}) = \frac{10}{40}$ | $P(\text{figuras y oros}) = \frac{3}{40}$ |
| $P(\text{figura u oro}) = \frac{12}{40} + \frac{10}{40} - \frac{3}{40} = \frac{19}{40} = 0,475$ | | |

5. Probabilidad condicionada

Quando tenemos un experimento compuesto puede ocurrir que uno de los sucesos dependa del anterior, a eso lo llamamos **probabilidad condicionada**, esto es, un suceso condiciona al otro y por tanto, el resultado final.

Ejemplo:

Tenemos una baraja de cartas españolas y tenemos un experimento compuesto consistente en sacar una carta sin mirar para después sacar una segunda carta de igual forma. La probabilidad será diferente si se devuelve la carta al mazo de nuevo o no.

Vamos a realizar un ejemplo de un experimento compuesto paso a paso siguiendo la estructura de árbol para con el fin de ver todo el proceso de forma clara.

Ejemplo:

Estamos ante una bolsa con cinco bolas (3 verdes y dos rojas). Queremos saber la probabilidad de extraer dos bolas verdes sin mirar una después de la otra

a) Devolviendo la bola a la bolsa de nuevo.

En la primera extracción, la probabilidad de sacar una bola verde es:

$$P(\text{verde}) = \frac{3}{5} = 0,6$$

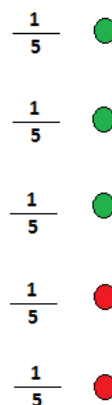
Devolvemos la bola verde a la bolsa y procedemos a la segunda extracción. Tenemos la misma situación del principio (3 bolas verdes y dos rojas), con lo que la probabilidad de sacar bola verde será la misma

$$P(\text{verde}) = \frac{3}{5} = 0,6$$

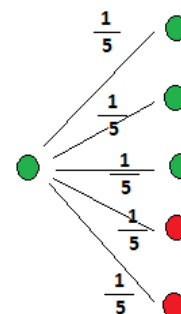
Por tanto, la probabilidad de sacar las dos bolas verde, una después de la otra devolviendo la bola es:

$$P(\text{verde y verde}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25} = 0,36$$

1ª extracción



2ª extracción



b) NO devolviendo la bola a la bolsa de nuevo.

En la primera extracción, la probabilidad de sacar una bola verde es:

$$P(\text{verde}) = \frac{3}{5} = 0,6$$

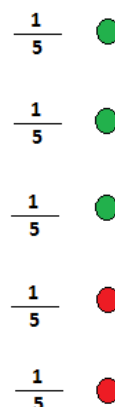
NO devolvemos la bola verde a la bolsa y procedemos a la segunda extracción. Ahora en la bolsa hay lo siguiente (2 bolas verdes y dos rojas), con lo que la probabilidad de sacar bola verde será la misma

$$P(\text{verde}) = \frac{2}{4} = 0,5$$

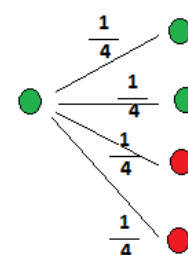
Por tanto, la probabilidad de sacar las dos bolas verde, una después de la otra devolviendo la bola es:

$$P(\text{verde y verde}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = 0,30$$

1ª extracción



2ª extracción



Las probabilidades varían si se hace de una u otra forma.

Practica:

3. Calcula la probabilidad en este experimento compuesto:

En una sala hay 10 hombres y 6 mujeres. Saldrán uno tras otro.

- Calcula la probabilidad de que los tres primeros que salgan al azar sean hombres.
- Calcula la probabilidad de que los tres primeros que salgan al azar sean mujeres.
- Calcula la probabilidad de que los tres primeros que salgan al azar sean dos hombres y una mujer.

Nota: se entiende que no vuelven a entrar.

Si en algún momento quisieras trasladar la probabilidad en forma de **porcentaje**, el proceso es sencillo, basta con multiplicar por 100 al cociente de la probabilidad.

Ejemplo:

En el caso anterior la probabilidad de sacar dos bolas verdes sin devolver era:

$$P(\text{verde y verde}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = 0,30$$

Multiplicamos por 100 el resultado y nos queda:

$$P(\text{verde y verde}) = 0,30 \cdot 100 = 30\%$$

Glosario

- **Experimento aleatorio:** es aquel que no es posible conocer previamente su resultado porque depende del azar.
- **Experimento determinista:** es aquel que se conoce previamente su resultado.
- **Espacio muestral:** son todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.
- **Suceso:** es cada uno de los posibles resultados que podemos obtener en un experimento aleatorio.
- **Probabilidad:** es el cociente entre los casos favorables y los posibles.
- **Experimento compuesto:** es aquel que está formado por varios experimentos simples realizados de forma simultánea o consecutiva.

Actividades

Actividad 1:

Cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios y cuáles deterministas

- El ganador de la liga de fútbol
- El precio de una caña de cerveza en el bar que acudes de forma habitual.
- La velocidad máxima en una autopista.
- El número que saca al tirar un dado.

Actividad 2:

Un dado para hacer quinielas tiene tres caras con el 1, dos caras con la X y una cara con el 2. Calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales.

Actividad 3:

Lanzamos al aire dos dados. Calcula la probabilidad de sacar dos 6.

Actividad 4:

Una urna tiene ocho bolas rojas, 5 amarilla y siete verdes. Si se extrae una bola al azar calcular la probabilidad de:

- a) Sea roja.
- b) Sea verde.
- c) Sea amarilla.
- d) No sea roja.
- e) No sea amarilla.

Actividad 5:

En los casinos se apuesta dinero en un juego que consiste en lanzar dos dados y obtener la puntuación de 7. Calcula la probabilidad de sacar dicha cifra.

Actividad 6:

Tenemos una baraja de cartas española (40 cartas) queremos saber lo siguiente:

- a) ¿Cuál es el espacio muestral?
- b) Escribe tres sucesos elementales.
- c) ¿Cuál es la probabilidad de sacar un tres? ¿Y un caballo? ¿Y el as de oros?
- d) ¿Cuál es la probabilidad de sacar un siete y una sota?

Actividad 7:

En una clase hay 25 personas de las que 20 llevan móvil. 16 personas lo tienen encendido.

- a) Calcula la probabilidad de que suene el teléfono a una de ellas.
- b) Si lo encienden en el descanso 3 más, ¿Cuál será la nueva probabilidad?

Actividad 8:

Hallar la probabilidad de que al lanzar al aire dos monedas, salgan:

- a) Dos caras.
- b) Dos cruces.
- c) Una cara y una cruz.

Actividad 9:

En una clase hay 25 personas de tres nacionalidades: 16 españolas, 5 marroquíes y 4 ecuatorianos. Suena el timbre del recreo y salen por la puerta deprisa. Calcula la probabilidad de que al salir:

- a) Los tres primeros sean españoles
- b) Los tres primeros sean ecuatorianos.

- c) Los tres primeros sean español, ecuatoriano y marroquí.
- d) Los tres primeros sean español, marroquí, marroquí.
- e) Los tres primeros sean extranjeros

NOTA: puedes hacer un diagrama de árbol.

Soluciones a los practica

Practica 1

- a) $A = \ll \text{sacar una carta de oros} \gg$ $B = \ll \text{sacar un as} \gg$ $C = \ll \text{sacar una sota} \gg$
 b) Suceso compuesto
 c) Suceso imposible
 d) $A = \ll \text{sacar una carta de oros} \gg$ y $B = \ll \text{sacar un as} \gg$
 e) Sucesos contrarios

Practica 2

- a)
$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{3}{6} = 0,5$$

 b)
$$P(B) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{1}{6} = 0,166$$

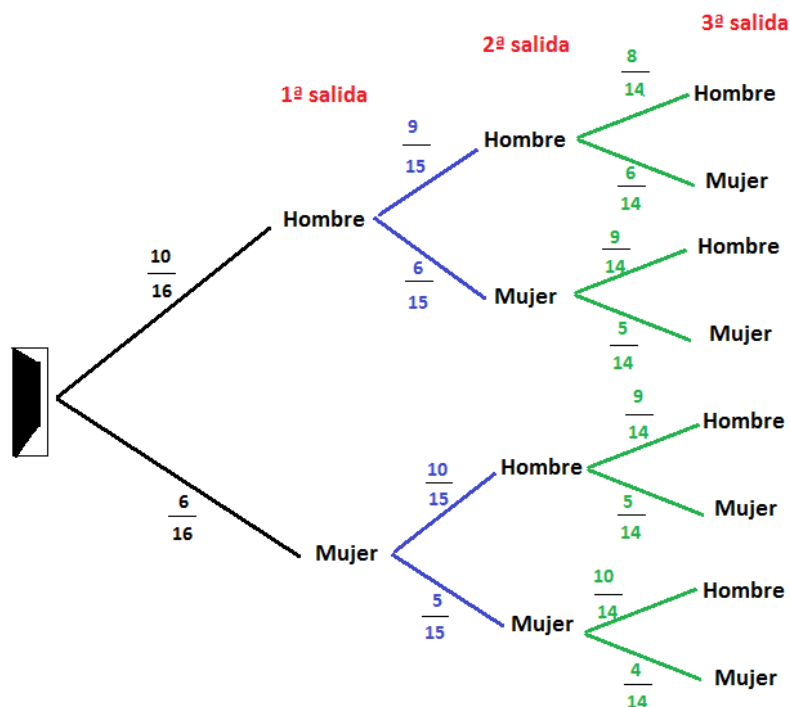
 c)
$$P(C) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{4}{6} = 0,666$$

 d)
$$P(D) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{3}{6} = 0,5$$

 e)
$$P(E) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{2}{6} = 0,333$$

Practica 3

Son 10 hombres y 6 mujeres que saldrán por la puerta de forma aleatoria. Lo primero que debemos hacer es calcular la probabilidad de cada uno de los sucesos compuestos de nuestro experimento de probabilidad condicionada. Vamos a realizar un diagrama de árbol para verlo mejor.



En la primera salida pueden ser hombre o mujer con su probabilidad puesta en color negro.

En la segunda salida puede ser también hombre o mujer pero como no entran los salientes, queda uno menos, de ahí que el cociente de la probabilidad sea una unidad menor.

En la tercera salida se repite el fenómeno anterior con lo que el cociente de la probabilidad vuelve a disminuir en una más.

Por tanto:

a) Si los tres primeros son hombres

$$P(\text{hombre, hombre, hombre}) = \frac{10}{16} \cdot \frac{9}{15} \cdot \frac{8}{14} = 0,214$$

b) Si los tres primeros son mujeres

$$P(\text{mujer, mujer, mujer}) = \frac{6}{16} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = 0,0357$$

c) Si los dos primeros son hombres y la tercera persona, una mujer

$$P(\text{hombre, hombre, mujer}) = \frac{10}{16} \cdot \frac{9}{15} \cdot \frac{6}{14} = 0,482$$

Bibliografía recomendada

- Gobierno de Aragón. *Matemáticas y Tecnología, módulo 4. Educación Secundaria para Personas Adultas*. España. Gobierno de Aragón. 2011. 126 p.
- Web: <http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/> INTEF (Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y Formación del Profesorado).
- Web: <http://www.vitutor.com>
- Web: http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/index_mat.htm. INTEF-CICEAD.