

## EJERCICIOS GEOMETRÍA 2º BACHILLERATO

- 1) Comprobar que los vectores  $\vec{a}=(1,1,3)$   $\vec{b}=(-1,2,0)$  y  $\vec{c}=(1,3,5)$  son linealmente dependientes. Encontrar la ecuación del plano que contiene a esos vectores y al punto  $Q(-1,0,1)$ .

$$rg(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} F_2 = f_2 + f_1 \\ F_3 = f_3 - f_1 \end{cases} \rightarrow rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \langle F_3 = 3f_3 - 2f_2 \rangle \rightarrow rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow$$

Los vectores son linealmente dependientes.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$$

- 2) Se consideran cinco puntos de coordenadas  $P(1,-1,2)$   $Q(-2,2,3)$   $R(-3,3,3)$   $S(-3,3,0)$  y  $T(-3,4,3)$ . Razona si forman parte del mismo plano

Con los cinco puntos construimos cuatro vectores y analizamos su rango

$$rg(\vec{PQ}, \vec{PR}, \vec{PS}, \vec{PT}) = rg \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} F_2 = 3f_2 - 4f_1 \\ F_3 = 3f_3 - 4f_1 \\ F_4 = 3f_4 - 4f_1 \end{cases} \rightarrow rg \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\langle F_3 = f_3 - 10f_2 \rangle \rightarrow rg \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 3 \rightarrow \text{Los vectores no son coplanarios.}$$

- 3) Sean los vectores  $\vec{u} = (-1,2,3)$   $\vec{v} = (2,5,-2)$   $\vec{x} = (4,1,3)$  y  $\vec{z} = (4,1,-8)$

- a) ¿Se puede expresar  $\vec{x}$  como combinación lineal de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ ? Si es así escribe dicha combinación lineal.

$$(4, 1, 3) = a(-1, 2, 3) + b(2, 5, -2) \rightarrow \begin{cases} 4 = -a + 2b \\ 1 = 2a + 5b \\ 3 = 3a - 2b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{Resolviendo las dos} \\ \text{primeras ecuaciones sale } a = -2 \text{ } b = 1 \rightarrow \\ \text{pero } 3 \neq 3(-2) - 2 \cdot 1 \end{cases}$$

el sistema es incompatible  $\rightarrow \vec{x}$  no puede expresarse como combinación lineal de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$

- b) ¿Se puede expresar  $\vec{z}$  como combinación lineal de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ ? Si es así escribe dicha combinación lineal.

$$(4, 1, -8) = a(-1, 2, 3) + b(2, 5, -2) \rightarrow \begin{cases} 4 = -a + 2b \\ 1 = 2a + 5b \\ -8 = 3a - 2b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{Resolviendo las dos primeras} \\ \text{ecuaciones sale } a = -2 \text{ } b = 1 \rightarrow \vec{z} = -2\vec{u} + \vec{v} \\ -8 = 3(-2) - 2 \cdot 1 \end{cases}$$

- c) ¿Son  $\vec{u}$   $\vec{v}$  y  $\vec{z}$  linealmente independientes? Justifica la respuesta.

$$\vec{z} = -2\vec{u} + \vec{v} \rightarrow rg(\vec{z}, \vec{u}, \vec{v}) = 2 \rightarrow \text{Son linealmente dependientes}$$

- 4) Dados los vectores  $\vec{u} = (1,-1,2)$  y  $\vec{v} = (3,1,-1)$  Halla el conjunto de vectores que siendo perpendiculares a  $\vec{u}$  pertenezcan al plano generado por  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

Si pertenecen al plano generado por  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  puede expresarse como combinación lineal de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} = a(1, -1, 2) + b(3, 1, -1) = (a + 3b, -a + b, 2a - b) \rightarrow$$

$$\text{Si } \vec{w} \text{ es perpendicular a } \vec{u} \rightarrow \vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \rightarrow a + 3b - (-a + b) + 2(2a - b) = 0 \rightarrow a + 3b + a - b + 4a - 2b = 0 \rightarrow$$

$$a = 0 \text{ y } b \text{ puede tomar cualquier valor} \rightarrow \vec{w} = \{(3b, b, -b) \mid b \in \mathbb{R}\}$$

- 5) Dada la recta  $r$  determinada por los puntos  $A(1,1,1)$  y  $B(3,1,2)$  y la recta  $s \equiv \begin{cases} x-2z-1=0 \\ y-2=0 \end{cases}$  averigua su posición relativa y halla, si existe, el plano que las contiene.

$$r \equiv \begin{cases} A(1, 1, 1) \\ B(3, 1, 2) \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} A(1, 1, 1) \\ \overrightarrow{AB} = \vec{u}_r(2, 0, 1) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x-2z-1=0 \\ y-2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1+2z \\ y=2 \\ z=t \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} C(1, 2, 0) \\ \vec{u}_s = (2, 0, 1) \end{cases} \rightarrow$$

$$rg(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = 1 \rightarrow rg(\overrightarrow{AC}, \vec{u}_r, \vec{u}_s) = rg \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow \text{rectas paralelas}$$

El plano que las contiene se construye:

$$\pi \equiv \begin{cases} A(1, 1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 1, -1) \\ \vec{u}_r = (2, 0, 1) \end{cases} \rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi \equiv x-2y-3z+3=0$$

- 6) Dados el punto  $P(2,1,1)$  y la recta  $r \equiv \begin{cases} x=2+t \\ y=3-t \\ z=4-3t \end{cases}$  encuentra la ecuación del plano que contiene a

ambos

$$r \equiv \begin{cases} x=2+t \\ y=3-t \\ z=4-3t \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} A(2, 3, 4) \\ \vec{u} = (1, -1, -3) \end{cases} \rightarrow \pi \equiv \begin{cases} A(2, 3, 4) \\ \overrightarrow{AP} = (0, 2, 3) \\ \vec{u} = (1, -1, -3) \end{cases} \rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\pi \equiv 3x-3y+2z-5=0$$

- 7) Calcula la ecuación del plano que contiene a la recta definida por el punto  $(1,1,1)$  y el vector  $(0,-5,3)$  y que pasa por el punto  $P(1,0,-5)$

$$\pi \equiv \begin{cases} R(1, 1, 1) \\ \overrightarrow{PR} = (0, -1, -6) \\ \vec{u} = (0, -5, 3) \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi \equiv x-1=0$$

- 8) Dadas las rectas  $r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+m}{2}$  y  $s \equiv \begin{cases} x=1-2\alpha \\ y=-1+4\alpha \\ z=5-\alpha \end{cases}$  determina  $m$  para que las rectas sean secantes, y calcula, en ese caso, el punto de corte.

$$r \equiv \begin{cases} A(2, -1, -m) \\ \vec{u}_r = (2, 1, 2) \end{cases}; s \equiv \begin{cases} B(1, -1, 5) \\ \vec{u}_s = (-2, 4, -1) \end{cases} \rightarrow \text{Si son secantes} \rightarrow \begin{cases} rg(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = 2 \\ rg(\overrightarrow{AB}, \vec{u}_r, \vec{u}_s) = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 & 5+m \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1+8(5+m)+2(5+m)+8=0 \rightarrow m = -59/10$$

Para calcular el punto de corte  $P$  se resuelve el sistema en paramétricas

$$r \equiv \begin{cases} x=2+2t \\ y=-1+t \\ z=\frac{59}{10}+2t \end{cases}; s \equiv \begin{cases} x=1-2\alpha \\ y=-1+4\alpha \\ z=5-\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2+2t=1-2\alpha \\ -1+t=-1+4\alpha \\ \frac{59}{10}+2t=5-\alpha \end{cases} \rightarrow \alpha = -\frac{1}{10} \rightarrow P\left(\frac{6}{5}, -\frac{7}{5}, \frac{51}{10}\right)$$

9) Estudia, según los distintos valores que puede tomar el parámetro  $m$  las posiciones relativas

del plano  $p$  y de la recta  $r$  de ecuaciones  $p \equiv mx - 3y + 2z = 1$   $r \equiv \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - y + mz = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} mx - 3y + 2z = 1 \\ 3x + y = 1 \\ 2x - y + mz = 1 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} m & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & m \end{pmatrix} \rightarrow |A| = m^2 + 9m - 10 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow m = 1; m = -10$$

⊗ Si  $m \neq 1$   $m \neq -10 \rightarrow rgA = rgA^* = 3 \rightarrow$  Recta y plano se cortan en un punto

$$\otimes \text{ Si } m = 1 \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} F_2 = f_2 - 3f_1 \\ F_3 = f_3 - 2f_1 \end{cases} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -6 & -2 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} F_3 = f_3 - 0,5f_2 \\ \end{cases} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$rgA = rgA^* = 2 \rightarrow$  Recta contenida en el plano

$$\otimes \text{ Si } m = -10 \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -10 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -10 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} F_2 = 10f_2 + 3f_1 \\ F_3 = 10f_3 + 2f_1 \end{cases} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -10 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 13 \\ 0 & -16 & -96 & 22 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\begin{cases} F_3 = f_3 + 16f_2 \\ \end{cases} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 230 \end{array} \right) \rightarrow rgA = 2 \quad rgA^* = 3 \rightarrow \text{Recta paralela al plano}$$

10) Estudia la posición relativa de los planos  $\pi \equiv ax + 20y + 7z = 1$ ,  $\pi' \equiv 3y + z = 0$ ,  $\pi'' \equiv x - ay = 1$  según los valores de  $a$ .

$$\begin{cases} x - ay = 1 \\ 3y + z = 0 \\ ax + 20y + 7z = 1 \end{cases} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ a & 20 & 7 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} F_3 = f_3 - af_1 \\ \end{cases} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 20 + a^2 & 7 & 1 - a \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} c_2 \leftrightarrow c_3 \\ \text{Las incógnitas} \\ \text{quedan } x, z, y \end{cases} \rightarrow$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 20 + a^2 & 1 - a \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} F_3 = f_3 - 7f_2 \\ \end{cases} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 - 1 & 1 - a \end{array} \right) \rightarrow |A| = a^2 - 1 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow a = \pm 1$$

⊗ Si  $a \neq \pm 1 \rightarrow rgA = rgA^* = 3 \rightarrow$  Los planos se cortan en un punto

$$\otimes \text{ Si } a = 1 \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow rgA = rgA^* = 2 \rightarrow \text{Los planos se cortan en una recta}$$

$$\otimes \text{ Si } a = -1 \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \rightarrow rgA = 2 \quad rgA^* = 3 \rightarrow \begin{cases} \text{No hay filas proporcionales} \\ \text{Los planos se cortan dos a dos} \end{cases}$$

11) Halla el punto del plano de ecuación  $\pi \equiv x - z = 3$  que está más cerca del punto  $P(3,1,4)$ , así como la distancia entre el punto  $P$  y el plano.

El punto pedido  $Q$  es el pie de la perpendicular trazada al plano desde el punto  $P$

$$\pi \equiv x - z = 3 \quad P(3, 1, 4) \text{ construimos } r \perp \pi \text{ y } P \in r \rightarrow r \equiv \begin{cases} P(3, 1, 4) \\ \vec{u}_r = \vec{n}_\pi = (1, 0, -1) \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 \\ z = 4 - t \end{cases}$$

$$\text{Calculamos el punto de corte de } r \text{ y } \pi \rightarrow \begin{cases} x - z = 3 \\ x = 3 + t \\ y = 1 \\ z = 4 - t \end{cases} \rightarrow 3 + t - 4 + t = 3 \rightarrow t = 2 \rightarrow Q(5, 1, 2)$$

$$d(P, \pi) = d(P, Q) = \sqrt{(5-3)^2 + (1-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ unidades}$$

12) Estudiar las posiciones relativas de los planos  $\pi \equiv x + y + z = -3$  y  $\pi' \equiv \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -6 - \mu \end{cases}$  y de

la recta  $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{3}$  con relación a ellos. Halla un punto P de  $r$  que esté a la misma distancia de  $\pi$  y de  $\pi'$

$$\pi' \equiv \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -6 - \mu \end{cases} \rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x+3 & y & z+6 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi' \equiv x + y + z + 9 = 0 \rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + y + z = -3 \\ \pi' \equiv x + y + z = -9 \end{array} \right\} \rightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -9 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow \text{Sist. incompatible} \rightarrow \text{Planos Paralelos}$$

Analizamos la posición entre  $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{3} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x-2y=3 \\ 3y-z=-3 \end{cases}$  y  $\pi \equiv x + y + z = -3$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = -3 \\ x - 2y = 3 \\ 3y - z = -3 \end{array} \right. \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \langle F_2 = f_2 - f_1 \rangle \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \langle F_3 = f_3 + f_2 \rangle \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{array} \right)$$

$$\text{rg}A = \text{rg}A^* = 3 \rightarrow r \text{ y } \pi \text{ se cortan en un punto}$$

$\left. \begin{array}{l} \pi \text{ y } \pi' \text{ paralelos} \\ r \text{ y } \pi \text{ se cortan en un punto} \end{array} \right\} \rightarrow \text{La recta corta a los planos en un punto en cada uno de ellos}$

$$P \in r \rightarrow P(3+2t, t, 3+3t) \text{ y cumple } d(P, \pi) = d(P, \pi') \rightarrow \frac{|3+2t+t+3+3t+3|}{\sqrt{3}} = \frac{|3+2t+t+3+3t+9|}{\sqrt{3}} \rightarrow$$

$$|6t+9| = |6t+15| \rightarrow 6t+9 = \pm(6t+15) \rightarrow \begin{cases} 6t+9 = 6t+15 \text{ no tiene solución} \\ 6t+9 = -6t-15 \rightarrow t = -2 \rightarrow P(-1, -2, -3) \end{cases}$$

13) Calcular los puntos de la recta  $r$  que pasa por los puntos P y Q de coordenadas P(-1,2,3) y Q(3,5,0), cuya distancia al punto C(-1,0,1) es de 12 unidades.

$$r \equiv \begin{cases} P(-1, 2, 3) \\ Q(3, 5, 0) \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} P(-1, 2, 3) \\ \vec{PQ} = (4, 3, -3) \end{cases} \rightarrow \text{Un punto de } r \text{ es de la forma: } S(-1+4t, 2+3t, 3-3t)$$

$$d(S, C) = 12 \rightarrow \sqrt{(-1+4t+1)^2 + (2+3t)^2 + (3-3t-1)^2} = 12 \rightarrow \sqrt{(4t)^2 + (2+3t)^2 + (2-3t)^2} = 12 \rightarrow$$

$$16t^2 + 4 + 9t^2 + 12t + 4 + 9t^2 - 12t = 144 \rightarrow 34t^2 = 136 \rightarrow t = \pm 2 \rightarrow \begin{cases} t = 2 \rightarrow S_1(7, 8, -3) \\ t = -2 \rightarrow S_2(-9, -4, 9) \end{cases}$$

14) Dados los planos  $\alpha \equiv x + y + z = 1$   $\beta \equiv ax + y = 1$  y  $\gamma \equiv x + (a+1)z = 0$ , determinar los valores de  $a$  para los cuales:

a) Los planos se cortan en un solo punto

b) Se cortan en una recta

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ ax + y = 1 \\ x + (a+1)z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a+1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \langle F_2 = f_2 - af_1 \rangle \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & -a & 1-a \\ 0 & -1 & a & -1 \end{array} \right) \rightarrow \langle f_2 \leftrightarrow f_3 \rangle \rightarrow$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 1-a & -a & 1-a \end{array} \right) \rightarrow \langle c_2 \leftrightarrow c_3 \rangle \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & -1 & -1 \\ 0 & -a & 1-a & 1-a \end{array} \right) \rightarrow \langle F_3 = f_3 + f_2 \rangle \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -a & -a \end{array} \right)$$

$$|A| = -a^2 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow a = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{Si } a = 0 \text{ rg}A = \text{rg}A^* = 2 \rightarrow \text{Comp. det er min ado} \rightarrow \text{se cortan en una recta} \\ \text{Si } a \neq 0 \text{ rg}A = \text{rg}A^* = 3 \rightarrow \text{Sist. Comp. det er min ado} \rightarrow \text{se cortan en un punto} \end{cases}$$

15) Encontrar el punto de intersección de la recta  $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$  con el plano  $\pi$  perpendicular a  $r$  que pasa por el origen de coordenadas.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} A(1, 2, 0) \\ \vec{u}_r = (1, -1, 1) \end{cases} \rightarrow \pi \equiv \begin{cases} O(0, 0, 0) \\ \vec{n}_\pi = \vec{u}_r = (1, -1, 1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \pi \equiv x - y + z + D = 0 \\ 0 + D = 0 \rightarrow D = 0 \end{cases} \rightarrow \pi \equiv x - y + z = 0$$

Punto de intersección:

$$\left. \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \right\} \rightarrow 1 + \lambda - (2 - \lambda) + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 1/3 \rightarrow P\left(1 + \frac{1}{3}, 2 - \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \rightarrow P\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

16) Dados los planos  $\pi_1 \equiv mx + 2y + 3z - 1 = 0$  y  $\pi_2 \equiv 2x + 4y + 6z + 5 = 0$ .

a) Determinar  $m$  para que sean paralelos y hallar su distancia

$$\left. \begin{cases} \pi_1 \equiv mx + 2y + 3z - 1 = 0 \\ \pi_2 \equiv 2x + 4y + 6z + 5 = 0 \end{cases} \right\} \rightarrow \text{Son paralelos si } \frac{m}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{-1}{5} \rightarrow m = 1$$

$$\left. \begin{cases} \pi_1 \equiv x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ \pi_2 \equiv 2x + 4y + 6z + 5 = 0 \end{cases} \right\} \rightarrow P \in \pi_1 \rightarrow y = 0 \ z = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow P(1, 0, 0) \rightarrow$$

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2) = \left| \frac{2 + 5}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2}} \right| = \frac{7}{\sqrt{56}} = \frac{\sqrt{56}}{8} \text{ unidades}$$

b) Determinar  $m$  para que sean ortogonales y hallar un punto y un vector de la recta intersección.

$$\left. \begin{cases} \pi_1 \equiv mx + 2y + 3z - 1 = 0 \\ \pi_2 \equiv 2x + 4y + 6z + 5 = 0 \end{cases} \right\} \rightarrow \text{Son ortogonales si } (m, 2, 3) \cdot (2, 4, 6) = 0 \rightarrow m = -13$$

$$r \equiv \begin{cases} -13x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ 2x + 4y + 6z + 5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P \rightarrow \text{Si } z = 0 \rightarrow \begin{cases} -13x + 2y - 1 = 0 \\ 2x + 4y + 5 = 0 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{1}{4} \ y = -\frac{9}{8} \rightarrow P\left(-\frac{1}{4}, -\frac{9}{8}, 0\right) \\ \vec{u}_r = (-13, 2, 3) \times (2, 4, 6) = (0, 84, -56) \end{cases}$$

17) Encuentra la recta que pasa por el punto  $P(1, 0, -1)$  y corta a  $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$   $s \equiv \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$

$$P(1, 0, -1) \ r \equiv \begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Q \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -3 \ z = -7 \ Q(0, -3, -7) \\ \vec{u}_r = (3, 2, -1) \times (2, -1, 1) = (1, -5, -7) \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} R(3, 0, 1) \\ \vec{u}_s = (1, 1, 1) \end{cases}$$

$$rg(\overrightarrow{PQ}, \vec{u}_r, \vec{u}_s) = rg \begin{pmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 1 & -5 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \rightarrow \text{Las rectas se cruzan}$$

La recta pedida  $t$  la calculamos como intersección de dos planos  $\rightarrow t \equiv \begin{cases} \pi : \text{contiene a } P \text{ y a } r \\ \pi' : \text{contiene a } P \text{ y a } s \end{cases} \rightarrow$

$$\pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -1 & -3 & -6 \\ 1 & -5 & -7 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi \equiv 9x + 13y - 8z = 17 \quad \pi' : \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi' \equiv x - z = 2$$

$$t \equiv \begin{cases} 9x + 13y - 8z = 17 \\ x - z = 2 \end{cases}$$

18) Dadas las rectas de ecuaciones  $r \equiv x = y = z$   $s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$  estudiar su posición y hallar la recta que corta a  $r$  y  $s$  y es paralela a la recta  $t \equiv (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 2, -1)$

$$r \equiv x = y = z \rightarrow r \equiv \begin{cases} P(0, 0, 0) \\ \vec{u}_r = (1, 1, 1) \end{cases}; s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2} \rightarrow s \equiv \begin{cases} Q(1, 2, 0) \\ \vec{u}_s = (1, 2, 2) \end{cases} \rightarrow \text{rg}(\vec{PQ}, \vec{u}_r, \vec{u}_s) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

SE CRUZAN. La recta pedida la calculamos como intersección de dos planos  $\rightarrow$

$$l \equiv \begin{cases} \pi : \text{contiene a } r \text{ y al vector de } t \vec{u}_t \\ \pi' : \text{contiene a } s \text{ y al vector de } t \vec{u}_t \end{cases} \rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi \equiv -3x + 2y + z = 0 \quad \pi' \equiv 2x - y = 0 \rightarrow$$

$$l \equiv \begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

19) Calcula la distancia entre las rectas  $\begin{cases} x - z = -2 \\ y - z = -4 \end{cases}$  y  $\begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

$$r \equiv \begin{cases} x - z = -2 \\ y - z = -4 \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -2 + z \\ y = -4 + z \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -4 + t \\ z = t \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} P(-2, -4, 0) \\ \vec{u}_r = (1, 1, 1) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} Q(0, 0, 0) \\ \vec{u}_s = (1, -1, 1) \end{cases} \rightarrow \text{rg}(\vec{PQ}, \vec{u}_r, \vec{u}_s) = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\rightarrow \text{LAS RECTAS SE CRUZAN} \rightarrow d(r, s) = \frac{|\vec{PQ}, \vec{u}_r, \vec{u}_s|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|(2, 0, -2)|} = \frac{4}{\sqrt{8}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} u$$

$$\left( \vec{u}_r \times \vec{u}_s \text{ se calcula con la regla mnemotécnica: } \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, 0, -2) \right)$$

20) Considera un cuadrado cuyo centro es el punto  $C(1, 1, -1)$  y tiene uno de sus lados en la recta  $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}$ . Calcula la ecuación del plano en el que se encuentra el cuadrado y la longitud de su lado.

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} P(2, 1, 1) \\ \vec{u}_r = (1, 1, 0) \end{cases} \rightarrow \pi \equiv \begin{cases} P(2, 1, 1) \\ \vec{PC} = (-1, 0, -2) \\ \vec{u}_r = (1, 1, 0) \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\pi \equiv 2x - 2y - z - 1 = 0$$

$$d(C, r) \text{ es la mitad del lado} \rightarrow \frac{l}{2} = d(C, r) = \frac{|\vec{PC} \times \vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|} = \frac{|(2, -2, -1)|}{|(1, 1, 0)|} = \frac{3}{\sqrt{2}} u \rightarrow l = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} u$$

$$\left( \vec{PC} \times \vec{u}_r \text{ se calcula con la regla mnemotécnica: } \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2, -2, -1) \right)$$

21) Dada la recta  $r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$  y el plano  $\pi \equiv x+y+z=0$ , hallar un plano que contenga a la recta  $r$  y corte al plano  $\pi$  en una recta paralela al plano  $OXY$

Calculamos la recta  $s$  contenida en  $\pi$  y paralela al plano  $OXY \rightarrow$

Su vector direccional  $\vec{u}_s$  es perpendicular a  $\vec{n}_\pi$  y  $\vec{n}_{OXY} \rightarrow \vec{u}_s = \vec{n}_\pi \times \vec{n}_{OXY} = (1, 1, 1) \times (0, 0, 1) = (1, -1, 0)$

El plano pedido  $\pi'$  contiene a  $r$  y a  $\vec{u}_s$

$$r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ z=t \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} P(1, 3, 0) \\ \vec{u}_r = (0, 0, 1) \end{cases} \rightarrow \pi' \equiv \begin{cases} P(1, 3, 0) \\ \vec{u}_r = (0, 0, 1) \\ \vec{u}_s = (1, -1, 0) \end{cases} \rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \\ \pi' \equiv x+y=4$$

22) Dadas las rectas  $r \equiv \begin{cases} x=1+a(y-2) \\ x=z \end{cases}$  y  $s \equiv \begin{cases} y-z+1=0 \\ ax-z=2a-2 \end{cases}$  Se pide la posición relativa de ellas en función del parámetro  $a$ . Para el caso de  $a=0$  determinar puntos  $P \in r$  y  $Q \in s$  tales que la distancia entre  $P$  y  $Q$  sea mínima.

$$r \equiv \begin{cases} x=1+a(y-2) \\ x=z \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} y-z+1=0 \\ ax-z=2a-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-ay=1-2a \\ x-z=0 \\ y-z=-1 \\ ax-z=-2+2a \end{cases} \rightarrow \left\langle \begin{matrix} \text{Cambiando} \\ \text{orden} \\ \text{ecuaciones} \end{matrix} \right\rangle \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -a & 0 & 1-2a \\ a & 0 & -1 & -2+2a \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left\langle \begin{matrix} F_3 = f_3 - f_1 \\ F_4 = f_4 - af_1 \end{matrix} \right\rangle \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -a & 1 & 1-2a \\ 0 & 0 & -1+a & -2+2a \end{array} \right) \rightarrow \left\langle F_3 = f_3 + af_2 \right\rangle \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-a & 1-3a \\ 0 & 0 & -1+a & -2+2a \end{array} \right) \rightarrow \left\langle F_4 = f_3 + f_4 \right\rangle$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-a & 1-3a \\ 0 & 0 & 0 & -1-a \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} |A^*| = (1-a) \cdot (-1-a) \\ |A^*| = 0 \rightarrow a = -1; a = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -1 \text{ rg}A = \text{rg}A^* = 3 \rightarrow \text{Se cortan en un punto} \\ a = 1 \text{ rg}A = 2 \text{ rg}A^* = 3 \rightarrow \text{rectas paralelas} \\ a \neq -1 \text{ } a \neq 1 \text{ rg}A = 3 \text{ rg}A^* = 4 \rightarrow \text{Se cruzan} \end{cases}$$

$$a=0 \rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1 \\ x=z \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=y \\ z=1 \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} A(1, 0, 1) \\ \vec{u}_r = (0, 1, 0) \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} y-z+1=0 \\ -z=-2 \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} x=x \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} B(0, 1, 2) \\ \vec{u}_s = (1, 0, 0) \end{cases}$$

$P$  es un punto de  $r \rightarrow P(1, t, 1)$ ;

$Q$  es un punto de  $s \rightarrow Q(s, 1, 2)$

y ambos puntos están sobre la perpendicular común

$$\vec{PQ} = (s-1, 1-t, 1) \rightarrow \begin{cases} \vec{PQ} \perp \vec{u}_r \\ \vec{PQ} \perp \vec{u}_s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{PQ} \cdot \vec{u}_r = 0 \\ \vec{PQ} \cdot \vec{u}_s = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (s-1, 1-t, 1) \cdot (0, 1, 0) = 0 \\ (s-1, 1-t, 1) \cdot (1, 0, 0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1-t=0 \\ s-1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t=1 \\ s=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P(1, 1, 1) \\ Q(1, 1, 2) \end{cases}$$

23) Se consideran los planos de ecuaciones  $-ax - y + az = 0$  y  $(a+3)x + 1/a y - z = 1$  ( $a \neq 0$ ).

Estudiar su posición relativa en función de  $a$ . Para  $a = -2$  los planos contienen caras de un cubo, calcular su volumen.

$$\left. \begin{aligned} \alpha &\equiv -ax - y + az = 0 \\ \beta &\equiv (a+3)x + \frac{1}{a}y - z = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Son secantes si } \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -a & -1 & a \\ a+3 & \frac{1}{a} & -1 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow$$

$$\frac{-a}{a+3} = \frac{-1}{\frac{1}{a}} = \frac{a}{-1} \rightarrow \begin{cases} \frac{-a}{1} = \frac{a}{-1} \\ \frac{-a}{a+3} = \frac{a}{-1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = a \\ a+3 = 1 \end{cases} \rightarrow a = -2 \rightarrow \begin{cases} a = -2 \text{ planos paralelos} \\ a \neq -2 \text{ planos secantes} \end{cases}$$

Para  $a = -2$  los planos son paralelos  $\rightarrow$  la distancia entre ellos es la longitud  $l$  de la arista del cubo  $\rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &\equiv 2x - y - 2z = 0 \\ \beta &\equiv x - \frac{1}{2}y - z = 1 \end{aligned} \right\} P(0, 0, 0) \in \alpha \rightarrow d(\alpha, \beta) = d(P, \beta) = \frac{|-1|}{\sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{2}{3} = l \rightarrow V = \left(\frac{2}{3}\right)^3 u^3$$

24) Halla la ecuación general del plano determinado por los puntos  $A(1,1,1)$ ,  $B(-2,0,-1)$  y  $C(1,-2,0)$ .  
Calcula el volumen del tetraedro que limita con los planos cartesianos.

$$\pi \equiv \begin{cases} A(1, 1, 1) \\ \overrightarrow{BA} = (3, 1, 2) \\ \overrightarrow{CA} = (0, 3, 1) \end{cases} \rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi \equiv -5x - 3y + 9z - 1 = 0$$

Los puntos de corte de  $\pi$  con los ejes los llamamos  $P, Q, R \rightarrow$

$$P = \pi \cap OX \equiv \begin{cases} -5x - 3y + 9z - 1 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow P\left(\frac{-1}{5}, 0, 0\right) \quad Q = \pi \cap OY \equiv \begin{cases} -5x - 3y + 9z - 1 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow Q\left(0, \frac{-1}{3}, 0\right) \quad R = \pi \cap OZ \equiv \begin{cases} -5x - 3y + 9z - 1 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow R\left(0, 0, \frac{1}{9}\right)$$

$$V = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}] \right| = \left| \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1/5 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{135} = \frac{1}{810} u^3$$

25) Dados los puntos  $A(1,-3,1)$ ,  $B(2,3,1)$  y  $C(1,3,-1)$  se pide:

a) Ecuación del plano  $\pi$  que los contiene.

$$\pi \equiv \begin{cases} A(1, -3, 1) \\ \overrightarrow{AB} = (1, 6, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 6, -2) \end{cases} \rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi \equiv 6x - y - 3z = 6$$

b) Calcular la distancia del origen de coordenadas al plano  $\pi$

$$d(O, \pi) = \frac{|-6|}{\sqrt{36+1+9}} = \frac{6}{\sqrt{46}} = \frac{6\sqrt{46}}{46} = \frac{3\sqrt{46}}{23} u$$

c) Volumen del tetraedro cuyos vértices son  $A, B, C$  y el origen de coordenadas.

$$V = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}] \right| = \left| \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot 12 = 2 u^3$$



26) Dadas las rectas  $r \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$  y  $\begin{cases} x + y = b \\ y - z = 1 \end{cases}$  determinar  $a$  y  $b$  para que sean perpendiculares y se corten.

$$r \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1} \rightarrow r \equiv \begin{cases} A(1, 1, -1) \\ \vec{u}_r = (a, 2, 1) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x + y = b \\ y - z = 1 \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} x = b - y \\ z = -1 + y \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} x = b - t \\ y = t \\ z = -1 + t \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} B(b, 0, -1) \\ \vec{u}_s = (-1, 1, 1) \end{cases}$$

Para que sean perpendiculares  $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s = 0 \rightarrow -a + 2 + 1 = 0 \rightarrow a = 3$

Para que se corten  $\text{rg}(\vec{AB}, \vec{u}_r, \vec{u}_s) = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} b-1 & -1 & 0 \\ a & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow a + b = 0 \rightarrow b = -3$

27) Halla la recta que pasa por el punto  $(1, 2, 1)$  y corta perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 - z \\ y = x - z - 1 = 2 - z - z - 1 = 1 - 2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} P(2, 1, 0) \\ \vec{u}_r = (-1, -2, 1) \end{cases}$$

Calculamos un plano  $\pi$  perpendicular a  $r$  y que pasa por  $A \rightarrow \pi \equiv \begin{cases} A(1, 2, 1) \\ \vec{n}_\pi = \vec{u}_r = (-1, -2, 1) \end{cases} \rightarrow$

$$\pi \equiv -x - 2y + z + D = 0 \rightarrow -1 - 4 + 1 + D = 0 \rightarrow D = 4 \rightarrow \pi \equiv -x - 2y + z + 4 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Calculamos el punto } B \\ \text{de corte de } \pi \text{ y } r \end{array} \right\} \begin{array}{l} -x - 2y + z + 4 = 0 \\ x = 2 - t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{array} \rightarrow -2 + t - 2 + 4t + t + 4 = 0 \rightarrow t = 0 \rightarrow B(2, 1, 0)$$

La recta pedida pasa por  $A$  y  $B \rightarrow s \equiv \begin{cases} A(1, 2, 1) \\ B(2, 1, 0) \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} A(1, 2, 1) \\ \vec{u} = \vec{AB} = (1, -1, -1) \end{cases} \rightarrow s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-1}$

28) Calcula un punto  $R$  de la recta  $s$  dada por  $s \equiv \begin{cases} x - y - 5 = 0 \\ x - 3y - z = 0 \end{cases}$  que equidiste de los puntos  $P(1, 0, -1)$  y  $Q(2, 1, 1)$ . Y calcula el área del triángulo determinado por los puntos  $P, Q, R$

$$s \equiv \begin{cases} x - y - 5 = 0 \\ x - 3y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 + y \\ z = x - 3y = 5 + y - 3y = 5 - 2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 + t \\ y = t \\ z = 5 - 2t \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} P(5, 0, 5) \\ \vec{u}_s = (1, 1, -2) \end{cases}$$

$$R(5+t, t, 5-2t) \rightarrow d(P, R) = d(Q, R) \rightarrow \sqrt{(5+t-1)^2 + t^2 + (5-2t+1)^2} = \sqrt{(t+3)^2 + (t-1)^2 + (-2t+5-1)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{(4+t)^2 + t^2 + (6-2t)^2} = \sqrt{(t+3)^2 + (t-1)^2 + (-2t+4)^2} \rightarrow -4t = -26 \rightarrow t = \frac{13}{2} \rightarrow R\left(\frac{23}{2}, \frac{13}{2}, -8\right)$$

El área del triángulo  $PQR \rightarrow A = \frac{1}{2} |\vec{PQ} \times \vec{PR}| = \frac{1}{2} \left| (1, 1, 2) \times \left(\frac{21}{2}, \frac{13}{2}, -7\right) \right| = \frac{1}{2} |(-20, 28, -4)| =$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(-20)^2 + 28^2 + (-4)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1200} = \frac{20}{2} \sqrt{3} = 10\sqrt{3} \text{ u}^2$$

29) Estudia la posición relativa de las rectas r y s y calcula el ángulo que forman:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \rightarrow \begin{cases} A(1, 0, 0) \\ \vec{u}_r = (2, 3, 4) \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 4 + 3\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B(3, 3, 4) \\ \vec{u}_s = (1, 2, 3) \end{cases} \rightarrow$$

$$rg(\vec{AB}, \vec{u}_r, \vec{u}_s) = rg \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow \text{Las rectas se cortan}$$

$$\cos(r \wedge s) = \cos(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_s|} = \frac{20}{\sqrt{406}} \rightarrow (r \wedge s) = 6^\circ 58' 56.99''$$

30) Sea r la recta que pasa por A(2,4,0) y B(6,2,0) y sea s la recta que pasa por C(0,0,7) y D(3,2,0) obtén la distancia entre r y s.

$$r \equiv \begin{cases} A(2, 4, 0) \\ B(6, 2, 0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A(2, 4, 0) \\ \vec{u}_r = \vec{AB} = (4, -2, 0) \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} C(0, 0, 7) \\ D(3, 2, 0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C(0, 0, 7) \\ \vec{u}_s = \vec{CD} = (3, 2, -7) \end{cases}$$

$$rg(\vec{AC}, \vec{u}_r, \vec{u}_s) = rg \begin{pmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix} = 3 \rightarrow \text{Se cruzan}$$

$$d(r, s) = \frac{|\vec{AC}, \vec{u}_r, \vec{u}_s|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -7 \end{vmatrix}}{\left( \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -7 \end{vmatrix}}{|(14, 28, 14)|} = \frac{42}{\sqrt{1176}} = \frac{42}{14\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2} u$$

31) Sea el tetraedro de vértices A(0,0,0), B(1,1,1), C(3,0,0) y D(0,3,0)

a) Calcula la ecuación del plano que contiene la cara BCD y la del plano que contiene la cara ACD

$$\text{Cara BCD} \rightarrow \pi \equiv \begin{cases} B(1, 1, 1) \\ \vec{BC} = (2, -1, -1) \\ \vec{BD} = (-1, 2, -1) \end{cases} \rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi \equiv x + y + z = 3$$

$$\text{Cara ACD} \rightarrow \pi' \equiv \begin{cases} A(0, 0, 0) \\ \vec{AC} = (3, 0, 0) \\ \vec{AD} = (0, 3, 0) \end{cases} \rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi' \equiv z = 0$$

b) Calcula las ecuaciones de dos de las alturas del tetraedro, la que pasa por el vértice A y la que pasa por el vértice B respectivamente. (nota: la altura del tetraedro es la recta que pasa por un vértice y es perpendicular al plano que determina la cara opuesta)

La altura que pasa por A tiene como vector direccional el vector normal del plano BCD

$$\vec{n}_{BCD} = \vec{BC} \times \vec{BD} = (2, -1, -1) \times (-1, 2, -1) = (3, 3, 3) \rightarrow \text{La altura es } r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z}{3}$$

La altura que pasa por B tiene como vector direccional el vector normal del plano ACD

$$\vec{n}_{ACD} = \vec{AC} \times \vec{AD} = (3, 0, 0) \times (0, 3, 0) = (0, 0, 9) \rightarrow \text{La altura es } s \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{9}$$

c) Comprueba que las dos alturas anteriores se cortan en un punto P.

$$r \equiv \begin{cases} x = 3t \\ y = 3t \\ z = 3t \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 + 9s \end{cases} \rightarrow \text{Punto de corte} \rightarrow \begin{cases} 3t = 1 \\ 3t = 1 \\ 3t = 1 + 9s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ s = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Se cortan en } P(1, 1, 1)$$

d) Comprueba que la recta que une cualquier vértice del tetraedro con el punto P es perpendicular a la cara opuesta (y es por tanto la altura del tetraedro)

$$\overrightarrow{AP} = (1, 1, 1) \quad \vec{n}_{BCD} = (3, 3, 3) \rightarrow \vec{n}_{BCD} = 3 \overrightarrow{AP} \rightarrow \text{recta y plano son perpendiculares}$$

$$\overrightarrow{CP} = (-2, 1, 1) \quad \vec{n}_{ABD} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (1, 1, 1) \times (0, 3, 0) = (-3, 0, 3) \text{ no es paralelo a } \overrightarrow{CP} \rightarrow CP \text{ no es altura}$$

$$\overrightarrow{DP} = (1, -2, 1) \quad \vec{n}_{ABC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, 1, 1) \times (3, 0, 0) = (0, 3, -3) \text{ no es paralelo a } \overrightarrow{DP} \rightarrow DP \text{ no es altura}$$

32) Hallar la ecuación de la proyección ortogonal  $r'$  de la recta  $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$  sobre el

$$\text{plano } \alpha \equiv x - 3y + 2z + 12 = 0$$

Calculamos la recta  $r'$  como intersección de dos planos: el plano  $\alpha$  y el plano  $\beta$  que contiene a  $r$  y es perpendicular a  $\alpha$

$$\beta: \begin{cases} P_r(1, 1, 2) \\ \vec{u}_r = (2, 1, 2) \\ \vec{n}_\alpha = (1, -3, 2) \end{cases} \rightarrow \beta \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \beta \equiv 8x - 2y - 7z + 8 = 0 \rightarrow r' \equiv \begin{cases} x - 3y + 2z + 12 = 0 \\ 8x - 2y - 7z + 8 = 0 \end{cases}$$

33) Perpendicular común de las rectas  $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{2}$   $s \equiv \begin{cases} x - y = 3 \\ z = 4 \end{cases}$

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{2} \rightarrow r \equiv \begin{cases} A(2, 4, 5) \\ \vec{u}_r = (1, 2, 2) \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x - y = 3 \\ z = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ z = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = 4 \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} B(3, 0, 4) \\ \vec{u}_s = (1, 1, 0) \end{cases}$$

$rg(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = 3 \rightarrow$  las rectas se cruzan  $\rightarrow$  construimos la perpendicular común como intersección de dos planos: Uno contiene a  $r$  y a un vector ortogonal a ambas rectas y el otro contiene a ese mismo vector y a  $s$ .

$$\vec{w} = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = (1, 2, 2) \times (1, 1, 0) = (-2, 2, -1)$$

$$\pi \equiv \begin{cases} \text{contiene a } r \\ \vec{w} \end{cases} \rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z-5 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi \equiv -6x - 3y + 6z = 6$$

$$\pi' \equiv \begin{cases} \text{contiene a } s \\ \vec{w} \end{cases} \rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y & z-4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi' \equiv -x + y + 4z - 13 = 0$$

$$\text{Perpendicular común} \rightarrow t \equiv \begin{cases} -6x - 3y + 6z = 6 \\ -x + y + 4z - 13 = 0 \end{cases}$$

34) Hallar la ecuación de la recta que pasa por  $A(1, 2, -1)$ , es perpendicular a la recta

$$r \equiv \begin{cases} 3y + z = 7 \\ x + 4y + z = 8 \end{cases} \text{ y paralela al plano } \pi \equiv 2x + y - z = 3$$

El vector de la recta buscada es perpendicular al vector de  $r$  y perpendicular al normal del plano. Un vector direccional de la recta buscada es el producto vectorial del direccional de  $r$  y del normal del plano

$$r \equiv \begin{cases} 3y + z = 7 \\ x + 4y + z = 8 \end{cases} \rightarrow \vec{u}_r = (0, 3, 1) \times (1, 4, 1) = (-1, 1, -3); \quad \pi \equiv 2x + y - z = 3 \rightarrow \vec{n}_\pi = (2, 1, -1)$$

$$\text{La recta buscada } s \equiv \begin{cases} A(1, 2, -1) \\ \vec{u}_s = \vec{u}_r \times \vec{n}_\pi = (-1, 1, -3) \times (2, 1, -1) = (2, -7, -3) \end{cases} \rightarrow s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z+1}{-3}$$

35) Halla la ecuación continua de la proyección ortogonal de la recta  $(x,y,z)=(2,1,1)+t(-1,0,2)$  sobre el plano  $\pi \equiv 2x + y - z = 0$ .

Calculamos la recta  $r'$  como intersección de dos planos: el plano  $\pi$  y el plano  $\pi'$  que contiene a  $r$  y es perpendicular a  $\pi$ .

$$\pi': \begin{cases} P_r(2, 1, 1) \\ \vec{u}_r = (-1, 0, 2) \rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi' \equiv 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ \vec{n}_\alpha = (2, 1, -1) \end{cases} \rightarrow r' \equiv \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 2x - 3y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Para escribir la recta  $r'$  en forma continua calculamos un punto de ella dando un valor a  $x$

$$x=0 \rightarrow \begin{cases} y-z=0 \\ -3y+z-2=0 \end{cases} \rightarrow y=-1, z=-1 \rightarrow P(0, -1, -1)$$

Y un vector direccional de  $r'$  con el producto vectorial  $\rightarrow \vec{u}_{r'} = (2, 1, -1) \times (2, -3, 1) = (-2, -4, -8)$

$$\rightarrow r' \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{-8}$$

36) Recta que se apoya en  $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{2}$   $s \equiv \begin{cases} x-y=3 \\ z=4 \end{cases}$  y pasa por el punto  $A(2,4,0)$

Calculamos la recta pedida  $p$  como intersección de dos planos: el plano  $\alpha$  que contiene a  $r$  y al punto  $A$  y el plano  $\beta$  que contiene a  $s$  y al punto  $A$

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{2} \rightarrow r \equiv \begin{cases} A(2, 4, 5) \\ \vec{u}_r = (1, 2, 2) \end{cases}; s \equiv \begin{cases} x-y=3 \\ z=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3+y \\ z=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ z=4 \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} B(3, 0, 4) \\ \vec{u}_s = (1, 1, 0) \end{cases}$$

$$p \equiv \begin{cases} \alpha: \begin{cases} \text{contiene a } A \\ \text{contiene a } r \end{cases} \\ \beta: \begin{cases} \text{contiene a } A \\ \text{contiene a } s \end{cases} \end{cases} \rightarrow \alpha \equiv \begin{cases} A(2, 4, 0) \\ P(2, 4, 5) \\ \vec{u}_r = (1, 2, 2) \end{cases} \alpha \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z \\ 0 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0; \beta \equiv \begin{cases} A(2, 4, 0) \\ B(3, 0, 4) \\ \vec{u}_s = (1, 1, 0) \end{cases} \beta \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z \\ 1 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha \equiv 10x - 5y = 0$$

$$\beta \equiv 4x - 4y - 5z + 8 = 0 \rightarrow$$

$$p \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 4x - 4y - 5z + 8 = 0 \end{cases}$$

37) Recta que se apoya en  $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$   $s \equiv \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$  y es paralela a  $t \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$

Calculamos la recta pedida  $p$  como intersección de dos planos: el plano  $\alpha$  que contiene a  $r$  y al vector direccional de  $t$  y el plano  $\beta$  que contiene a  $s$  y al vector direccional de  $t$ .

$$r \equiv \begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{Punto} \rightarrow x=0 \rightarrow \begin{cases} 2y - z - 1 = 0 \\ -y + z + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow y = -3 \rightarrow z = -7 \rightarrow A(0, -3, -7) \\ \text{vector} \rightarrow \vec{u}_r = (3, 2, -1) \times (2, -1, 1) = (1, -5, -7) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} B(3, 0, 1) \\ \vec{u}_s = (1, 1, 1) \end{cases} \rightarrow p \equiv \begin{cases} \alpha: \text{contiene a } r \text{ y } \vec{u}_t = (2, 1, 2) \\ \beta: \text{contiene a } s \text{ y } \vec{u}_t = (2, 1, 2) \end{cases}$$

$$\alpha \equiv \begin{vmatrix} x & y+3 & z+7 \\ 1 & -5 & -7 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \alpha \equiv -3x - 16y + 11z + 29 = 0; \beta \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \beta \equiv x - z - 2 = 0$$

$$p \equiv \begin{cases} -3x - 16y + 11z + 29 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases}$$

38) Calcula la distancia entre las rectas  $t \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$  y  $s \equiv \begin{cases} x = 3+t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases}$

$$t \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1} \rightarrow \begin{cases} A(1, 1, 2) \\ \vec{u}_t = (1, 1, 1) \end{cases}; \quad s \equiv \begin{cases} x = 3+t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B(3, 0, 1) \\ \vec{u}_s = (1, 1, 1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{rg}(\vec{u}_t, \vec{u}_s) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \\ \text{rg}(\overline{AB}, \vec{u}_t, \vec{u}_s) = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \end{cases}$$

Las rectas son paralelas  $\rightarrow d(t, s) = d(A, s) = \frac{|\overline{AB} \times \vec{u}_s|}{|\vec{u}_s|} = \frac{|(2, -1, -1) \times (1, 1, 1)|}{|(1, 1, 1)|} = \frac{|(0, -3, 3)|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6} u$

39) Calcula la distancia entre los planos  $\pi \equiv 2x + 3y + 4z - 5 = 0$  y  $\pi' \equiv 2x + 3y + 4z + 7 = 0$

Los planos son paralelos. La distancia entre ellos se calcula eligiendo un punto de uno de ellos y calculando la distancia de ese punto al otro plano.

$\pi \equiv 2x + 3y + 4z - 5 = 0 \rightarrow$  Calculamos un punto  $A \in \pi$  dando valores  $x = 1; y = 1 \rightarrow z = 0 \rightarrow A(1, 1, 0)$

$$d(\pi, \pi') = d(A, \pi') = \frac{|2 + 3 + 7|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{12}{\sqrt{29}} = \frac{12\sqrt{29}}{29} u$$

40) Halla la ecuación del plano que es perpendicular a la recta  $r \equiv \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + z = -3 \end{cases}$  y pasa por el punto  $P(3, 2, 1)$

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + z = -3 \end{cases} \rightarrow \vec{u}_r = (2, 1, -1) \times (1, -1, 1) = (0, 1, 1) = \vec{n}_\pi$$

$$\pi \equiv 0x + y + z + D = 0 \rightarrow P \in \pi \rightarrow 0 + 2 + 1 + D = 0 \rightarrow D = -3 \rightarrow \pi \equiv y + z - 3 = 0$$

41) Dada la recta  $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = z \end{cases}$  y el punto  $P(1, 2, -1)$

a) Halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a r

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \rightarrow \vec{u}_r = (1, 1, 2) \rightarrow \pi \equiv x + y + 2z + D = 0$$

$$P \in r \rightarrow 1 + 2 - 2 + D = 0 \rightarrow D = -1 \rightarrow \pi \equiv x + y + 2z - 1 = 0$$

b) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano hallado y los ejes coordenados.

$$\pi \equiv x + y + 2z - 1 = 0 \rightarrow$$

Corte con OX

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z - 1 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow A(1, 0, 0)$$

Corte con OY

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z - 1 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow B(0, 1, 0)$$

Corte con OZ

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z - 1 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow C(0, 0, 1/2)$$

Área del triángulo ABC  $\rightarrow \overline{AB} = (-1, -1, 0); \overline{AC} = (-1, 0, 1/2) \rightarrow$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \left( \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1/2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right) = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right) \rightarrow$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \left| \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right) \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 + 1^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4} u^2 = 0,61u^2$$

42) Dados el plano  $\alpha \equiv 2x + 2y + z = 3$  y el punto  $A(1, 0, 2)$ , sea  $B$  el pie de la perpendicular de  $A$  sobre el plano y  $C(2, 1, -2)$  un punto del plano. Halla área del triángulo  $ABC$

Calculamos una recta  $r \perp \alpha$  y que pasa por  $A \rightarrow r \equiv \begin{cases} A(1, 0, 2) \\ \vec{u}_r = (2, 2, 1) \end{cases} \rightarrow r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$

Calculamos la intersección de  $r$  y  $\alpha \rightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = 3 \\ x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2(1+2t) + 2(2t) + 2 + t = 3 \\ 2 + 4t + 4t + 2 + t = 3 \\ 9t = -1 \\ t = -1/9 \end{cases} \rightarrow B\left(\frac{7}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{17}{9}\right)$

Área del triángulo  $ABC \rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(-\frac{2}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}\right); \overrightarrow{AC} = (1, 1, -4)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = (1, -1, 0) \rightarrow$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |(1, -1, 0)| = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + 1^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} u^2$$

43) Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto  $P(1, 2, -1)$ , es paralela al plano

$$\pi \equiv 2x + y - z = 3 \text{ y es perpendicular a la recta } r \equiv \begin{cases} 3y + z = 7 \\ x + 4y + z = 8 \end{cases}$$

El vector de la recta pedida  $s$  es perpendicular al normal del plano  $\pi (\vec{n}_\pi)$  y al direccional de  $r (\vec{u}_r) \rightarrow$

$$r \equiv \begin{cases} 3y + z = 7 \\ x + 4y + z = 8 \end{cases} \rightarrow \vec{u}_r = (0, 3, 1) \times (1, 4, 1) = (-1, 1, -3) \rightarrow \vec{u}_s = \vec{n}_\pi \times \vec{u}_r = (2, 1, -1) \times (-1, 1, -3) = (-2, 7, 3)$$

$$\rightarrow s \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{7} = \frac{z+1}{3}$$

También se puede calcular como intersección de dos planos  $\rightarrow$

$$r \equiv \begin{cases} \pi' \rightarrow \pi' \parallel \pi \text{ y pasa por } P \\ \pi'' \rightarrow \pi'' \perp r \text{ y pasa por } P \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} \pi' : 2x + y - z + D = 0 \rightarrow 2 + 2 + 1 + D = 0 \rightarrow D = -5 \\ \pi'' : -x + y - 3z + E = 0 \rightarrow -1 + 2 + 3 + E = 0 \rightarrow E = -4 \end{cases}$$

$$\rightarrow r \equiv \begin{cases} 2x + y - z - 5 = 0 \\ -x + y - 3z - 4 = 0 \end{cases}$$

44) Sean  $A(1, -5, a)$   $B(2, a, -1)$   $C(a, -5, 2)$ , los tres vértices de un triángulo  $ABC$ . Determina el valor de  $a$  para que ese triángulo sea rectángulo en  $C$  y después calcula su área

$$A(1, -5, a) \ B(2, a, -1) \ C(a, -5, 2) \rightarrow \overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{CA} \rightarrow \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$$

$$\rightarrow (a-2, -5-a, 3) \cdot (a-1, 0, 2-a) = 0 \rightarrow$$

$$(a-2) \cdot (a-1) + (-5-a) \cdot 0 + 3 \cdot (2-a) = 0 \rightarrow a^2 - 6a + 8 = 0 \rightarrow a = 2, a = 4$$

$$\otimes a = 2 \rightarrow \overrightarrow{CA} = (-1, 0, 0), \overrightarrow{CB} = (0, -7, 3) \rightarrow \overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CA} = (0, 3, 7) \rightarrow \text{Área} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CA}| = \frac{1}{2} \sqrt{58} = 3,81 u^2$$

Como el triángulo es rectángulo también se puede calcular el área

$$\text{con las longitudes de los catetos} \rightarrow \text{Área} = \frac{1}{2} \sqrt{49+9} \cdot \sqrt{1} = 3,81 u^2$$

$$\otimes a = 4 \rightarrow \overrightarrow{CA} = (-3, 0, 2), \overrightarrow{CB} = (2, -9, 3) \rightarrow \overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CA} = (-18, -13, -27) \rightarrow$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CA}| = \frac{1}{2} \sqrt{1222} = 17,48 u^2.$$

$$\text{Calculando las longitudes de los catetos} \rightarrow \text{Área} = \frac{1}{2} \sqrt{4+81+9} \cdot \sqrt{9+4} = \frac{34,95}{2} = 17,48 u^2$$

45) Encuentra las ecuaciones de una recta que sea paralela a los planos  $\alpha \equiv 3x + y - 2z - 2 = 0$  y  $\alpha' \equiv -2x + z = 10$  y que pase por el origen de coordenadas.

Si es paralela a los planos  $\alpha$  y  $\alpha' \rightarrow$  es paralela a la recta que determinan esos planos  $\rightarrow$

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y - 2z = 2 \\ -2x + z = 10 \end{cases} \rightarrow \text{tiene el mismo vector direccional que } r \rightarrow \vec{u}_r = (3, 1, -2) \times (-2, 0, 1) = (1, 1, 2) \rightarrow$$

$$s \equiv \begin{cases} O(0, 0, 0) \\ \vec{u}_r = (1, 1, 2) \end{cases} \rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$$

También se puede resolver calculando planos  $\pi$  y  $\pi'$  paralelos a  $\alpha$  y  $\alpha'$  y que pasen por  $O(0, 0, 0)$ .

$$\text{La recta pedida es la determinada por } \pi \text{ y } \pi' \rightarrow s \equiv \begin{cases} 3x + y - 2z = 0 \\ -2x + z = 0 \end{cases}$$

46) Un triángulo tiene dos vértices en los puntos  $O(0, 0, 0)$  y  $P(1, 1, 1)$  y el tercer vértice está situado en la recta  $r \equiv \begin{cases} x = 2y \\ z = 1 \end{cases}$ . Halla este vértice si el área del triángulo es  $\sqrt{2}/2$

$$r \equiv \begin{cases} x = 2y \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow \text{Un punto cualquiera de } r \text{ es de la forma } Q(2t, t, 1) \rightarrow$$

$$\overline{OP} = (1, 1, 1) \quad \overline{OQ} = (2t, t, 1) \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} |\overline{OP} \times \overline{OQ}| = \frac{1}{2} |(1-t, 2t-1, -t)| = \frac{1}{2} \sqrt{(1-t)^2 + (2t-1)^2 + (-t)^2} \rightarrow$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{(1-t)^2 + (2t-1)^2 + (-t)^2} \rightarrow 2 = 1 - 2t + t^2 + 4t^2 - 4t + 1 + t^2$$

$$\rightarrow 6t^2 - 6t = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 0 \rightarrow \text{Solución } Q(0, 0, 1) \\ t = 1 \rightarrow \text{Solución } Q'(2, 1, 1) \end{cases}$$

47) Estudia la posición relativa de los planos  $\begin{cases} \alpha \equiv x + y = 1 \\ \beta \equiv ay + z = 0 \\ \pi \equiv x + (a+1)y + az = a+1 \end{cases}$ , en función de  $a$ .

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ ay + z = 0 \\ x + (a+1)y + az = a+1 \end{cases} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & a+1 & a & a+1 \end{array} \right) \rightarrow \langle F_3 = f_3 - f_1 \rangle \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & a & a & a \end{array} \right) \rightarrow \langle F_3 = f_3 - f_2 \rangle$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & a \end{array} \right) \rightarrow |A| = a \cdot (a-1) \rightarrow |A| = 0 \rightarrow a = 0, a = 1 \rightarrow$$

$$\otimes a = 0 \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow rgA = rgA^* = 2 \rightarrow \text{Compatible indeterminado} \rightarrow$$

$\rightarrow$  dos son coincidentes y el tercero los corta  $\rightarrow$  se cortan en una recta

$$\otimes a = 1 \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow rgA = 2, rgA^* = 3 \rightarrow \text{Incompatible y sin filas proporcionales en } A \rightarrow \text{se cortan dos a dos}$$

$$\otimes a \neq 0 \text{ y } a \neq 1 \rightarrow rgA = rgA^* = 3 \rightarrow \text{Compatible determinado} \rightarrow \text{se cortan en un punto}$$

48) Halla las proyecciones del punto  $P(4, -2, 1)$ :

a) Sobre el plano  $\pi: -3x + y + 2z - 2 = 0$

Construimos la recta  $r$  perpendicular al plano y que contenga al punto  $P$

$$r \equiv \begin{cases} P(4, -2, 1) \\ \vec{u}_r = \vec{n}_\pi = (-3, 1, 2) \end{cases} \rightarrow r \equiv \frac{x-4}{-3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2} \rightarrow Q_r(4-3t, -2+t, 1+2t)$$

$$\text{Calculamos } P' = \pi \cap r \rightarrow \begin{cases} -3x + y + 2z - 2 = 0 \\ x = 4 - 3t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3(4-3t) + (-2+t) + 2(1+2t) - 2 = 0 \\ -12 + 9t - 2 + t + 2 + 4t - 2 = 0 \\ 14t = 14 \\ t = 1 \end{cases} \rightarrow P'(1, -1, 3)$$

b) sobre la recta  $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-7}{-1}$

Construimos el plano  $\pi$  perpendicular a la recta y que contenga al punto  $P$

$$\pi \equiv \begin{cases} P(4, -2, 1) \\ \vec{n}_\pi = \vec{u}_r = (3, 5, -1) \end{cases} \rightarrow \pi \equiv 3x + 5y - z + D = 0 \rightarrow 3 \cdot 4 + 5 \cdot (-2) - 1 + D = 0 \rightarrow D = -1 \rightarrow \pi \equiv 3x + 5y - z - 1 = 0$$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-7}{-1} \rightarrow Q_r(1+3t, 1+5t, 7-t)$$

$$\text{Calculamos } P'' = \pi \cap r \rightarrow \begin{cases} 3x + 5y - z - 1 = 0 \\ x = 1 + 3t \\ y = 1 + 5t \\ z = 7 - t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3(1+3t) + 5(1+5t) - (7-t) - 1 = 0 \\ 3 + 9t + 5 + 25t - 7 + t - 1 = 0 \\ 35t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \rightarrow P''(1, 1, 7)$$

49) Dados el plano y la recta  $\begin{cases} \pi \equiv x + y + mz = p \\ r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2} \end{cases}$ . Se pide: a) Calcular  $m$  y  $p$  para que sean secantes, b) Para que sean paralelos c) Para que el plano contenga a la recta.

$$\left\langle \begin{matrix} A(3, 2, 1) & B(1, 2, 4) \\ C(4, 0, 3) & D(1, 1, 7) \end{matrix} \right\rangle \rightarrow \vec{AB} = (-2, 0, 3); \vec{AC} = (1, -2, 2); \vec{AD} = (-2, -1, 6) \rightarrow V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \frac{5}{6} u^3$$

$$\begin{cases} \pi \equiv x + y + mz = p & x + y + mz = p \\ r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2} \rightarrow -x = y-2 & 2y-4 = -z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ 2y + z = 4 \\ x + y + mz = p \end{cases} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & m & p \end{array} \right) \langle F_3 = f_3 - f_1 \rangle \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & m & p-2 \end{array} \right)$$

⊗ Si  $m \neq 0$   $rgA = rgA^* = 3 \rightarrow$  Sist. COMPATIBLE DETERMINADO  $\rightarrow$  recta y plano se cortan en un punto

⊗ Si  $m = 0 \rightarrow \begin{cases} p \neq 2 \text{ } rgA = 2 \text{ } rgA^* = 3 \rightarrow \text{Sist. INCOMPATIBLE} \rightarrow \text{recta paralela al plano} \\ p = 2 \text{ } rgA = rgA^* = 2 \rightarrow \text{Sist. COMPATIBLE INDETERMINADO} \rightarrow \text{recta contenida en el plano} \end{cases}$

50) a) Obtener el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos  $(3, 2, 1)$ ,  $(1, 2, 4)$ ,  $(4, 0, 3)$  y  $(1, 1, 7)$

b) Longitud del segmento de la recta  $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$  comprendido entre los planos

$$\pi \equiv 3x - z = 5 \text{ y } \mu \equiv x - y - z = 0$$

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \rightarrow P(t, 2t, t) \rightarrow$$

$$\text{Intersección con } \pi \rightarrow 3x + z = 5 \rightarrow 3t + t = 5 \rightarrow t = 5/4 \rightarrow P\left(\frac{5}{4}, \frac{10}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

$$\text{Intersección con } \mu \rightarrow x - y - z = 5 \rightarrow t - 2t - t = 0 \rightarrow t = 0 \rightarrow Q(0, 0, 0) \rightarrow$$

$$d(P, Q) = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{10}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{150}{16}} = \frac{5\sqrt{6}}{4} u$$



51) Hallar la distancia entre el punto A (-4, 2, 1) y la diagonal del plano OXY.

La diagonal del plano OXY pasa por los puntos  $d \equiv \begin{cases} O(0, 0, 0) \\ B(1, 1, 0) \end{cases} \rightarrow d \equiv \begin{cases} O(0, 0, 0) \\ \overrightarrow{OB} = (1, 1, 0) \end{cases} \rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$

$$d(A, d) = \frac{|\vec{u}_d \times \overrightarrow{OA}|}{|\vec{u}_d|} = \frac{|(1, 1, 0) \times (-4, 2, 1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|(1, -1, 6)|}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{38}{2}} = \sqrt{19} u$$

52) Calcula la perpendicular común a las rectas  $r \equiv x = y = z$  y  $s \equiv x = y = 3z - 1$ .

$$r \equiv x = y = z \rightarrow r \equiv \begin{cases} O(0, 0, 0) \\ \vec{u}_r = (1, 1, 1) \end{cases}; \quad s \equiv x = y = 3z - 1 \rightarrow x = y = 3\left(z - \frac{1}{3}\right) \rightarrow x = y = \frac{z - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} \rightarrow \begin{cases} P\left(0, 0, \frac{1}{3}\right) \\ \vec{u}_s = \left(1, 1, \frac{1}{3}\right) \end{cases} \rightarrow$$

$$rg(\overrightarrow{OP}, \vec{u}_r, \vec{u}_s) = rg \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \langle F_3 = f_3 - f_1 \rangle rg \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = 2 \quad y \quad rg(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = 2 \rightarrow \text{Las rectas se cortan} \rightarrow$$

La recta pedida (t) pasa por el punto de corte y tiene de vector direccional un vector perpendicular a  $\vec{u}_r, \vec{u}_s \rightarrow$

$$\text{Punto de corte} \rightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x = y = 3z - 1 \end{cases} \rightarrow z = 3z - 1 \rightarrow -2z = -1 \rightarrow z = 1/2 \rightarrow R\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Vector} \rightarrow \vec{u}_t = (1, 1, 1) \times (1, 1, 1/3) = (1, -1, 0) \rightarrow t \equiv \frac{x - 1/2}{1} = \frac{y - 1/2}{-1} = \frac{z - 1/2}{0}$$

53) Hallar la ecuación de la recta, en forma paramétrica, que pasa por el punto P (1, 2, -1), es

paralela al plano  $\alpha \equiv 2x + y - z = 3$  y es perpendicular a la recta  $r \equiv \begin{cases} 3x + z = 7 \\ x + 4y + z = 8 \end{cases}$

$$r \equiv \begin{cases} 3x + z = 7 \\ x + 4y + z = 8 \end{cases} \rightarrow \vec{u}_r = (3, 0, 1) \times (1, 4, 1) = (-4, -2, 12) \rightarrow \vec{u}_r = (2, 1, -6)$$

$$\alpha \equiv 2x + y - z = 3 \rightarrow \vec{n}_\alpha = (2, 1, -1) \rightarrow$$

El vector de la recta pedida (s) es perpendicular a  $\vec{u}_r$  y a  $\vec{n}_\alpha \rightarrow \vec{u}_s = (2, 1, -6) \times (2, 1, -1) = (-5, 10, 0) \rightarrow$

$$s \equiv \frac{x - 1}{-5} = \frac{y - 2}{10} = \frac{z + 1}{0} \rightarrow s \equiv \frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z + 1}{0}$$

54) Obtener el ángulo formado por el plano y la recta:  $\pi \equiv x = 1$  y  $r \equiv \begin{cases} y = 2 \\ 3x - \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$

$$\pi \equiv x = 1 \rightarrow \vec{n}_\pi = (1, 0, 0); \quad r \equiv \begin{cases} y = 2 \\ 3x - \sqrt{3}z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = \sqrt{3}/3z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}/3t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases} \rightarrow \vec{u}_r = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, 1\right) \rightarrow$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{n}_\pi|} = \frac{\sqrt{3}/3}{\sqrt{\frac{1}{3} + 1} \cdot \sqrt{1}} = \frac{\sqrt{3}/3}{\sqrt{4/3}} = \frac{\sqrt{3}/3}{2/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}/3}{6/2} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 30^\circ$$