"Por qué y cómo GeoGebra"

Enrique Hernando Arnáiz
Asoc. CyL Educ. Mat. "Miguel de Guzmán"
Instituto GeoGebra de Castilla y León
La Merced-Jesuitas, Burgos
Universidad de Burgos

GEOGEBRA: ENLACES Y REFERENCIAS

INSTALADORES:
http://www.geogebra.org/download
Otras versiones: http://wiki.geogebra.org/en/Reference:GeoGebra_Installation

MANUALES:
PDF:
http://static.geogebra.org/help/geogebraquickstart_es.pdf
http://static.geogebra.org/book/intro-en.pdf
WIKI:
http://wiki.geogebra.org/es/Manual
http://wiki.geogebra.org/es/Tutoriales
http://wiki.geogebra.org/es/Pistas
GG EN LA ENSEÑANAZA (R. Losada):
http://geogebra.es/cvg/index.html
http://geogebra.es/cvg/manual/index.html

LIBRO SOBRE GEOGEBRA "TUBE":
http://tube.geogebra.org/student/b831633# (M. A. Fresno)

LIBRO GEOGEBRA: GeoGebra en la enseñanza de las Matemáticas CFIE Ávila:
https://ggbm.at/mma2tjef

PROYECTO GAUSS (actualizado):
http://geogebra.es/gauss/materiales_didacticos/materiales_didacticos.htm

INSTITUTOS GEOGEBRA:
IGCL: http://www.geogebracyl.socylem.es/
IGC: http://www.geogebra.es/
http://institutosgeogebra.es/
GeoGebra Institute Network: http://www.geogebra.org/institutes

REFERENCIAS:
- Proyecto Gauss (R. Losada y J. L. Álvarez)
- GeoGebra en la enseñanza de las Matemáticas (R. Losada)
- Club GeoGebra Iberoamericano (A. Carrillo, E. Amaro, F. Haro)
- Wiki/geogebra.org
- IGCL "GeoGebra, un punto de partida" (J. M. Arranz, R. Jiménez)
- "GeoGebratube"

“CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO” (Para empezar)

CIRCUNFERENCIAS

El objetivo no es facilitar un material para seguirlo al pie de la letra ya que se trata de ofrecer un conjunto de actividades que puedan servir de referencia, de manera que cada uno seleccione las que considere oportunas y por supuesto, este si es el objetivo, las complete con otras actividades y tareas, creando materiales propios para posteriormente usarlos y/o compartirlos.

C1.- Actividad de investigación

a) Dibuja un punto A y piensa cuántas circunferencias puedes dibujar que pasen por el punto A. Indica cómo has realizado la construcción.

b) Ahora vamos a dibujar además del punto A otro punto B para averiguar cuántas circunferencias pasan a la vez por A y por B. Al igual que antes, indica cómo realizas la construcción.

c) Lo complicamos algo más, ahora dibuja tres puntos no alineados A, B y C, para averiguar cuántas circunferencias pasan a la vez por estos tres puntos.

d) Si añadimos un punto más, ¿podríamos construir la circunferencia que pasa por todos los puntos?

C2.- ELEMENTOS DE UNA CIRCUNFERENCIA

Dibuja una circunferencia de centro A y que pase por un punto B. Traza los siguientes elementos:

- Un radio.
- Una cuerda.
- Un diámetro.

C3.- ANIMACIONES

Una animación sencilla

Dibuja una circunferencia.

Utiliza la herramienta *Circunferencia dados su centro y uno de sus puntos*. Llama O al centro y A al punto por el que pasa la circunferencia.

Crea un nuevo punto P en la circunferencia.

Activa la animación automática del punto P. ¿Qué ocurre?

Otra animación

Dibuja los radios OA y OP.

Utiliza la herramienta *Segmento entre dos puntos*

Intenta animar el punto A. ¿Qué ocurre?

A continuación, anima el punto P. ¿Qué ocurre?

¿Cuál es la diferencia entre las dos animaciones?

Animación y rastro

En la construcción anterior, oculta el radio OA. Cambia el color del radio OP.

Para ello, pulsa el botón derecho sobre el radio y selecciona *Propiedades de objeto*. Pulsa de nuevo el botón derecho sobre el radio y *Activa rastro*.

Pulsa para iniciar la animación.

C4.- POSICIONES RELATIVAS

Posición relativa de dos circunferencias

Dibuja dos circunferencias.

Investiga que posiciones relativas pueden tener las dos circunferencias.

Posición relativa de una circunferencia y una recta

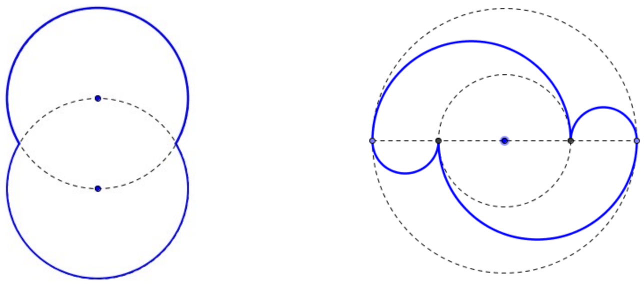
¿Qué posiciones relativas pueden tener una circunferencia y una recta?

Una vez dibujadas una circunferencia y una recta encuentra los puntos de intersección entre ambos objetos.

A continuación, mueve cualquiera de los dos objetos para cambiar su posición relativa, ¿qué ocurre con los puntos de intersección?

C5.- DIBUJANDO CIRCUNFERENCIAS

Intenta realizar las construcciones siguientes:



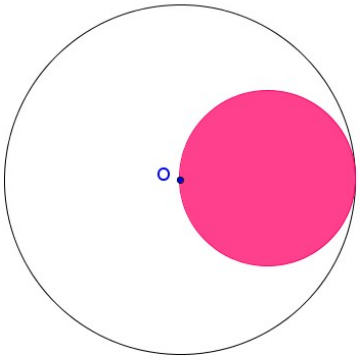
¿Puedes calcular su longitud? ¿Y su área?

C6.- ÁREAS

Dos circunferencias

En una circunferencia se inscribe una nueva circunferencia que pasa por el centro y es tangente a la primera.

Realiza la construcción.



Determina la relación entre las áreas de las dos circunferencias.

Tres circunferencias

Realiza la siguiente construcción:

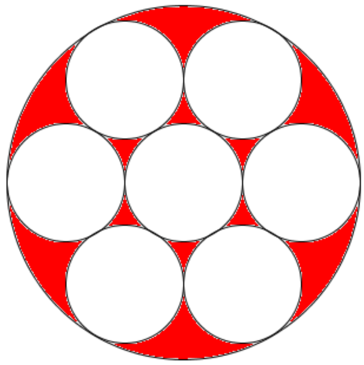
Dibuja tres circunferencias a, b y c, que cumplan las condiciones siguientes:

- La circunferencia b pasa por el centro de la circunferencia a y es tangente a ella.
- La circunferencia c pasa por el centro de la circunferencia b y es tangente a ella.

Una vez dibujadas, responde a la cuestión siguiente: ¿qué fracción del círculo a queda dentro del círculo b pero fuera del círculo c?

Siete circunferencias

Realiza la construcción siguiente.



Si las circunferencias pequeñas tienen un radio de una unidad de medida, ¿cuál es el área de la parte dibujada en rojo?

C7.- TANGENTES

Recta tangente por un punto de la circunferencia

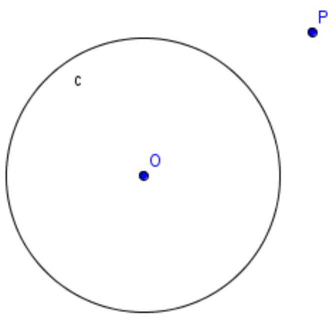
Dibuja una circunferencia c cuyo centro llamamos O y sea A un punto de la circunferencia.
Traza la recta tangente a la circunferencia por el punto A.
¿Qué propiedad cumple la recta tangente?

Recta tangente por un punto exterior

Sea P un punto exterior a una circunferencia de centro O. Traza las rectas tangentes a la circunferencia por el punto P.
¿Qué propiedades cumplen las dos tangentes?

Circunferencia tangente

Dibuja una circunferencia c cuyo centro llamamos O y un punto exterior P.



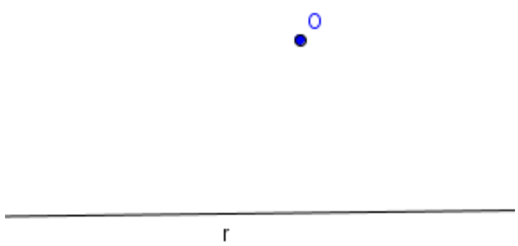
Construye la circunferencia de centro P que sea tangente a la circunferencia c.

Una vez construida mueve los objetos que intervienen en la figura para comprobar que las condiciones de tangencia se mantienen. Mueve primero el punto P, a continuación mueve el centro O y por último intenta cambiar el tamaño de la circunferencia.

¿Hay alguna posición en la que desaparece la circunferencia obtenida? Estudia que pasaría si P es un punto interior a la circunferencia.

Una tangente más

Dibuja la circunferencia cuyo centro es O y es tangente a la recta r.



Circunferencia tangente

Dibuja una circunferencia c cuyo centro es O y un punto A en la circunferencia. Sea P un punto interior a la circunferencia.

Traza la circunferencia que pasa por el punto P y es tangente a la circunferencia c en el punto A.

¿Hay que cambiar algo en la construcción para que sea válida para el caso en el que el punto P sea exterior a la circunferencia c?

C8.- PARA TERMINAR

Para finalizar, os proponemos otra propuesta de investigación.

Dibuja una circunferencia, colorea el círculo y traza dos rectas que corten a la circunferencia.

Intenta averiguar cuál es el mayor número de partes en las que puedes dividir el círculo con las dos rectas.

Y si en lugar de dos rectas, dibujamos tres rectas.

¿Cuál es el máximo de partes en las que podrás dividir el círculo?

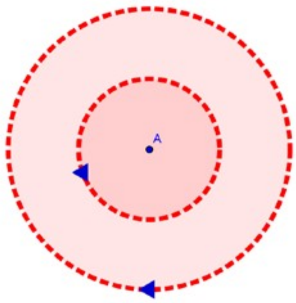
CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO PROBLEMAS (1ª parte)

Correspondientes a este primer bloque de contenidos os proponemos los siguientes retos para resolver con GeoGebra.

Problema_C1.

Dos ciclistas están circulando en un circuito descrito por dos circunferencias concéntricas de radios una doble que la otra. ¿Qué velocidad deben de llevar uno respecto al otro para que den el mismo número de vueltas?

Construye una situación con GeoGebra que justifique la respuesta.



Problema_C2.

En una caja cuadrada de lado 10 cm se van a meter dos monedas antiguas, para ello se disponen de muchos tamaños, ¿de qué tamaño máximo aproximado se deben tomar para que encajen dos monedas en la caja?

¿Y si queremos meter tres monedas?

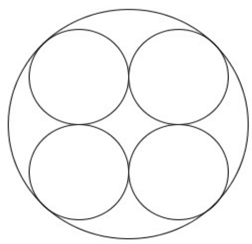
Problema_C3.

A partir de una corona circular, construye un círculo cuya área sea igual al área de la corona circular.

Problema_C4.

Realiza la construcción siguiente:

Encuentra la relación entre el radio de la circunferencia mayor y el radio de las circunferencias interiores.



Problema_C5.

En una circunferencia se trazan dos radios. Construir una cuerda en la circunferencia que quede dividida en tres partes iguales por los dos radios.

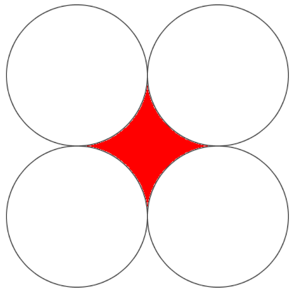
“CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO” (Un poco más)

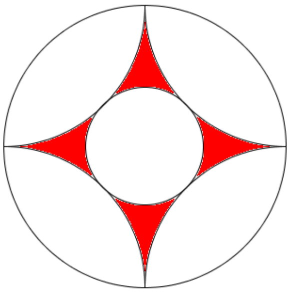
C9.- ÁREAS

Este bloque lo dedicaremos a realizar distintas construcciones a partir de las cuales calcularemos áreas.

Cuatro círculos

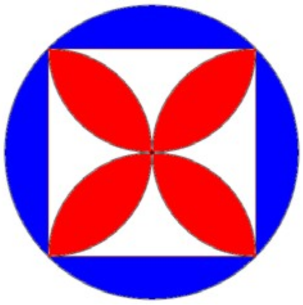
Realiza la construcción de los cuatro círculos e intenta obtener el valor del área de la zona sombreada.





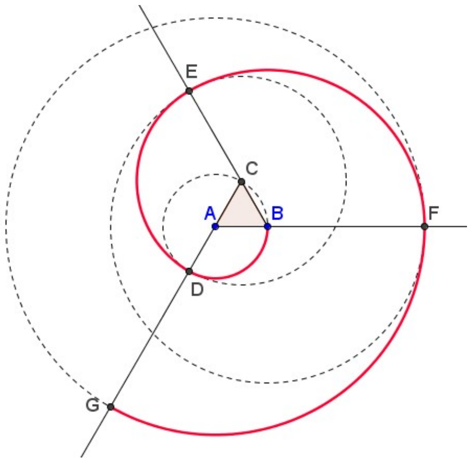
Arcos

Realiza la construcción que aparece en la figura e intenta calcular el área de la zona sombreada.



Más áreas

Una vez construida la figura, determina la relación entre el área de la zona de color rojo (“pétalos”) y la de color azul (segmentos circulares).



C10.- ESPIRALES

Espiral de tres centros

Utilizando las opciones que GeoGebra ofrece para dibujar arcos, dibuja la espiral de tres centros, siguiendo el proceso que aparece en la figura.

No olvides dibujar un triángulo equilátero para comenzar la construcción.

Dibuja ahora una espiral de cuatro centros.

C11.- TEOREMAS

Tres circunferencias (Teorema de Johnson)

Dibuja tres circunferencias del mismo radio que pasen por un punto A. Cada dos de estas circunferencias se cortan en otro punto distinto de A. Traza la circunferencia que pasa por estos tres puntos. ¿Qué observas?

Dos cuerdas

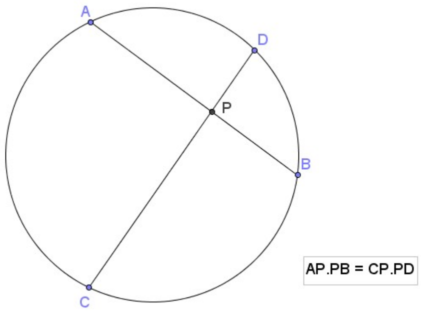
En una circunferencia se dibujan dos cuerdas AB y CD que se cortan en un punto P.

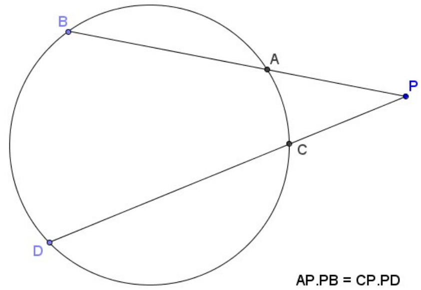
Comprobad que se verifica que $AP \ x \ PB = CP \ x \ PD$.

De las secantes

En una circunferencia se dibujan dos cuerdas AB y CD que se cortan en un punto P.

Si dos rectas secantes interceptan a una circunferencia, los segmentos cumplen la relación: $AP\ x\ PB = CP\ x\ PD$.





C12.- ÁREAS IGUALES

"Dividir un círculo en cuatro áreas iguales mediante circunferencias" (Johannes de Muris, s. XIV)

Pista: A partir de un punto dela circunferencia, inscribe un hexágono, un cuadrado y un triángulo.

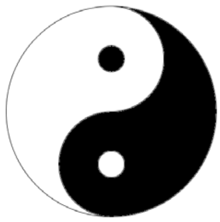
Para finalizar, os proponemos construir los distintos arcos –podéis verlos al final– que se pueden encontrar en el arte y la arquitectura.

Para ello, os recomiendo la Web de José Antonio Mora, en la que podréis encontrar unos applets excelentes con las distintas construcciones.

http://jmora7.com/Arcos/index.htm

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO PROBLEMAS (2ª parte)

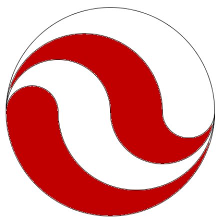
Problema_C6.



El Yin-Yang es un símbolo místico en cuya construcción se utilizan circunferencias y semicircunferencias.

La parte oscura es el Yin y la clara es el Yang. Realiza la construcción de este símbolo.

Intenta generalizar el símbolo para obtener algo similar a la siguiente figura:

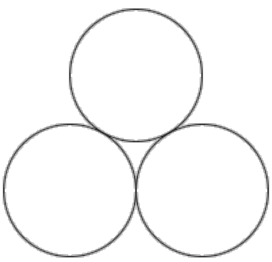


Determina el área y el perímetro de la parte blanca.

Problema_C7.

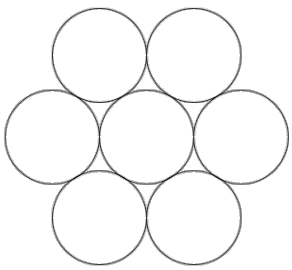
A partir de cuatro puntos no alineados, encuentra una circunferencia que esté a la misma distancia de los cuatro puntos.

Problema_C8.



Realiza la siguiente construcción en la que hay tres circunferencias tangentes.

Puedes intentar ampliar la figura para obtener la siguiente:




ARCOS
Tipos de arco (según su centro)
De un centro
De dos centros
De tres o más centros
De medio punto
Carpanel
Escarzano
Peraltado
Rebajado
Apuntado
En cortina
Conopial
En gola
Mixtilíneo
De herradura
Visigodo
Emiral cordobés
Califal cordobés
Rampante
Tumido
Polilobulado
Trilobulado
Tudor
Tipos de arco
(orden alfabético)
Abocinado
Adintelado
Angrelado
Angular
Arcosolio
Catenario
Ciego
De descarga
De entibo
Deprimido
Deprimido rectilíneo
Diafragma
Entrecruzado
Esviado
Fajón
Falso
Festoneado
Formero
Geminado
Perpiaño
Toral
Triunfal
DICCIONARIO VISUAL de TÉRMINOS ARQUITECTÓNICOS © CÁTEDRA

”POLÍGONOS” (Para empezar)

INTRODUCCIÓN

En este tema vamos a trabajar con polígonos de más de tres lados, trabajaremos los triángulos más adelante. Vamos a clasificar los cuadriláteros atendiendo a sus lados y también a sus diagonales. También trabajaremos con polígonos regulares en los que vamos a identificar su apotema y sus diagonales. Vamos a diferenciar entre polígonos cóncavos y polígonos convexos, y vamos a poder comprobar que GeoGebra es una potente herramienta para resolver situaciones de áreas y perímetros.

P1.- ACTIVIDADES DE INVESTIGACIÓN

A) Dados dos puntos fijos A y B

- ¿Cómo debe estar colocado un tercer punto C para que se pueda construir un cuadrado que tenga A, B y C como vértices del mismo?
- ¿Y un rectángulo?
- ¿Y un trapecio isósceles??

B) *Construye* un cuadrado a partir del segmento correspondiente al lado.

- ¿Es posible dibujar un cuadrado a partir del segmento correspondiente al lado utilizando la herramienta Rota objeto en torno a un punto el ángulo indicado?
- Intenta generalizar este método para dibujar cualquier polígono regular.

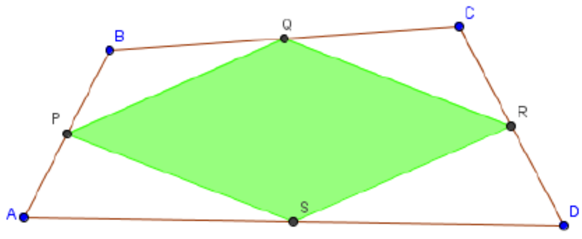
C) Dado un segmento AB, construir un cuadrado en el que una de sus diagonales sea el segmento AB.

D) *Construye* diversos cuadriláteros: un cuadrado, un rectángulo, un rombo, un romboide, un trapecio y un trapezoide.

E) *Construye* un hexágono regular sin utilizar la herramienta de polígono regular que ofrece GeoGebra, como si utilizaras regla y compás.

F) Una diagonal es un segmento que une dos vértices no consecutivos en un polígono. Dibuja un cuadrilátero cualquiera y haz una clasificación de los cuadriláteros atendiendo a sus diagonales (Cuadrado, Rectángulo, Rombo, Romboide, Paralelogramo, Trapecio, Trapezoide).

P2.- CUADRILÁTERO DE VARIGNON



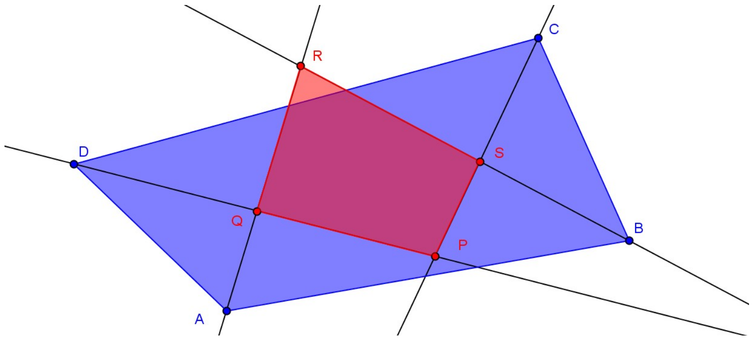
El cuadrilátero de Varignon PQRS se obtiene al unir los puntos medios de un cuadrilátero cualquiera ABCD.

Dibuja un cuadrilátero y traza el cuadrilátero de Varignon.

- Comprueba que el cuadrilátero de Varignon es un paralelogramo.
- Comprueba igualmente que el área del cuadrilátero de Varignon es la mitad del área del cuadrilátero inicial.
- Dibuja las diagonales del cuadrilátero ABCD para investigar cuando el cuadrilátero de Varignon será un rectángulo.
- ¿Y cuándo será un cuadrado?

P3.- BISECTRICES PARA INVESTIGAR

Si en un cuadrilátero ABCD se trazan las bisectrices de los ángulos interiores, las bisectrices de dos ángulos contiguos se cortan en un punto. Llamamos a estos puntos P, Q, R y S. Clasifica el cuadrilátero PQRS según sea el cuadrilátero inicial ABCD.



P4.- POLÍGONOS REGULARES

A) Dibuja un cuadrado que tenga 4 unidades de lado (Utiliza la herramienta *Polígono*)
¿Cuál es su perímetro? ¿Y su área?
Mueve los vértices para intentar obtener otro polígono que tenga:
a) El mismo perímetro.
b) El misma área.
c) El mismo perímetro y la misma área.
Intenta hacer lo mismo para un cuadrado que tenga 3 unidades de lado.
¿Cuál es su perímetro? ¿Y su área?

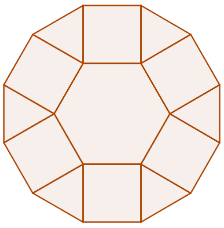
Mueve los vértices para intentar obtener otro polígono que tenga:
a) El mismo perímetro.
b) La misma área.
c) El mismo perímetro y la misma área.
¿Qué diferencias hay entre los dos valores utilizados?

B) Los elementos de un polígono regular son los lados, la apotema y las diagonales, dibuja un polígono regular de cinco lados y señala los tres elementos con diferentes colores
Dado un segmento AB y construye sobre él:
- Un triángulo equilátero
- Un cuadrado
- Un pentágono regular
- Un hexágono regular
- Y polígonos regulares de siete, ocho, nueve y diez lados. (Puedes definir un deslizador para que en una sola construcción puedas dibujar los ocho polígonos que se piden).

C) Utilizando la construcción anterior, rellena la siguiente tabla:

Nº de lados	3	4	5	6	7	8	…	12
Nº de diagonales								

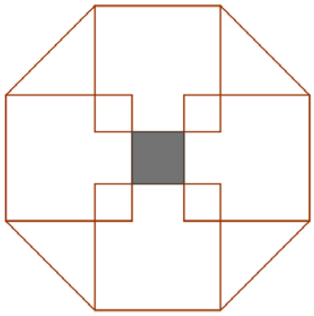
D) Dibuja un hexágono regular y sobre cada uno de sus lados construye un cuadrado. Une los vértices por medio de segmentos para obtener una figura similar a la siguiente:



- ¿Es regular esta figura?
- Puedes calcular el valor de la apotema en función de la medida del lado
- Si hacemos una construcción similar sobre los lados de un cuadrado. La figura obtenida ¿es un octógono regular?

P6.- Octógono Regular

Sobre los cuatro lados de un octógono regular de 1 unidad de lado se han dibujado cuatro cuadrados interiores de lado el mismo que el del octógono. Reproduce el dibujo y calcular el área de la zona sombreada

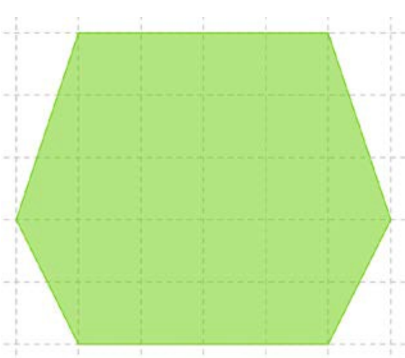


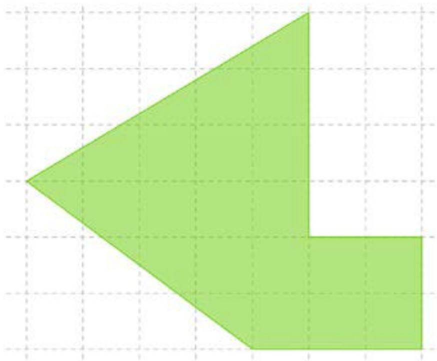
P7.- POLÍGONOS CÓNCAVOS Y CONVEXOS

Un polígono se llama convexo cuando al unir dos puntos cualesquiera de éste el segmento que los une se queda dentro del mismo, caso contrario, si algún segmento se sale completamente o en parte fuera del polígono diremos que es cóncavo.

Dibuja un polígono cualquiera:

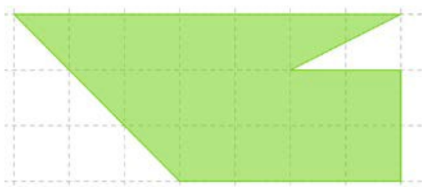
- Oculta todos sus vértices
- Dibuja dos puntos P y Q sobre el polígono, mueve los puntos para comprobar que están bien construidos
- Dibuja el segmento PQ y pon este segmento de otro color y aumenta el grosor del trazo
- Comprueba moviendo los puntos como es el polígono que has construido, si es convexo o es cóncavo
- Sitúa el punto P sobre uno de los lados del polígono (no en un vértice) y activa la animación automática del punto Q
- Finalmente activa el rastro del segmento PQ y comprueba lo que ocurre, si tu polígono cambia por completo de color será convexo y si aparece otro polígono distinto al tuyo éste es cóncavo

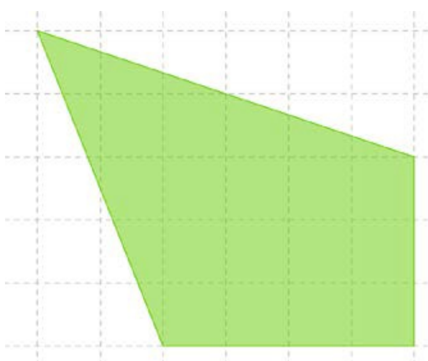




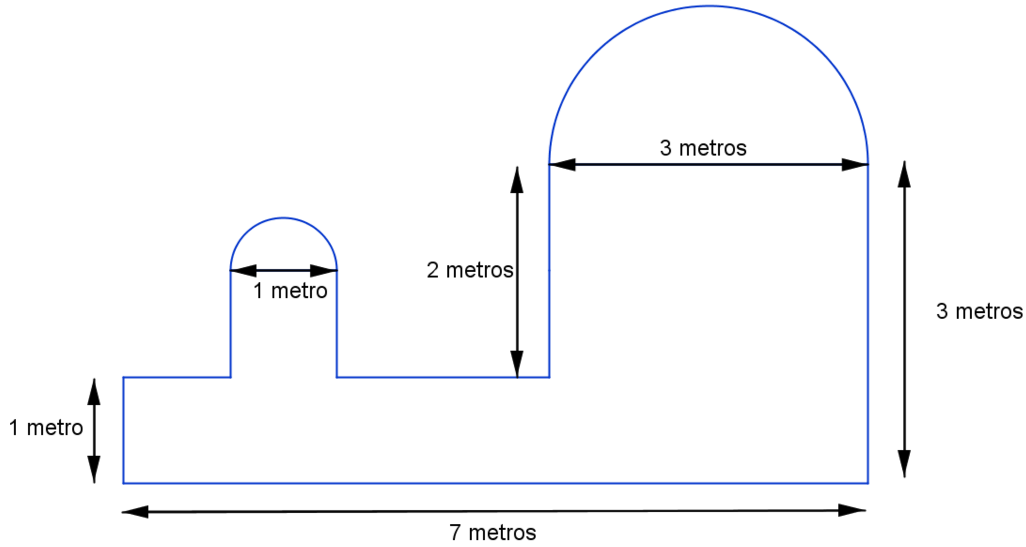
P8.- ÁREAS Y PERÍMETROS

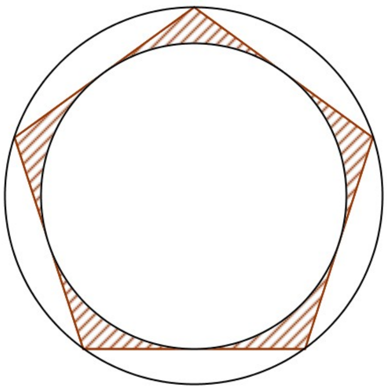
Realiza las siguientes construcciones y calcula el área y el perímetro de las siguientes figuras, considerando el lado de la cuadrícula una unidad





Construye una figura similar a la de la figura con GeoGebra y calcula su área.





Pentágono Regular

Realiza la siguiente construcción

¿Puedes hallar el área de la superficie rallada?

Supongamos que el lado del pentágono regular es de 12 cm.

POLÍGONOS. PROBLEMAS (1ª parte)

Correspondientes a este primer bloque os proponemos los siguientes retos para resolver con GeoGebra.

Problema_P1.

Dado un octógono regular, dibujar el cuadrado inscrito de mayor área y el cuadrado circunscrito de menor área y hallar la relación entre ambas áreas

Problema_P2.

Dibuja un cuadrado de lado 12 unidades utilizando la técnica de regla y compás (sin utilizar la herramienta cuadrado). Dibuja un cuadrado inscrito al anterior de área la tercera parte y averigua la relación que existe entre sus diagonales

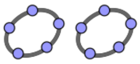
Problema_P3.

En una urbanización se han construido siete casas iguales que distan 35 metros entre sí una de la otra. Se quiere vallar la urbanización con una valla en forma de cuadrado y además se quiere construir una piscina en el centro de la urbanización que equidiste de las siete viviendas.

Haz una construcción con GeoGebra de la situación descrita y calcula la longitud del vallado y la situación de la piscina. Si en lugar de siete viviendas fuesen ocho; ¿Cómo afectaría a la construcción?

Problema_P4.

Construye un cuadrado cualquiera y otro que tenga doble de área que el primero.



Problema_P5.

Dado un heptágono regular, los puntos de corte de las diagonales definen otros dos heptágonos.

El mediano al unir los vértices de dos en dos, y el pequeño al unirlos de tres en tres. Comprueba que las proporciones de las áreas de ambos heptágonos son invariables sea cual sea el lado del heptágono.

”POLÍGONOS” (Un poco más)

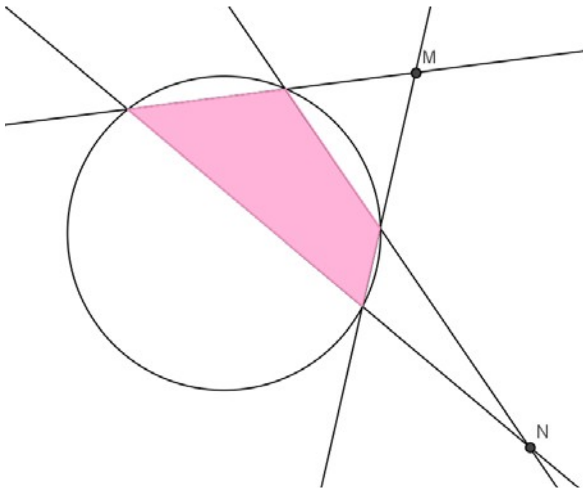
P9.- INTRODUCCIÓN

En esta segunda parte vamos a seguir trabajando con polígonos y vamos a incluir polígonos estrellados. De la misma manera, vamos a estudiar los ángulos en los diferentes polígonos regulares.

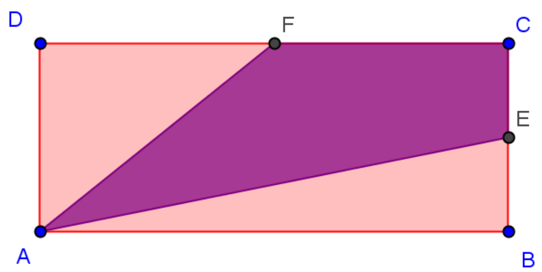
Actividades de Investigación

A) Dado un polígono cualquiera, construye un nuevo polígono de un lado menos cuya área sea igual a la del polígono inicial.

B) A partir de un polígono cualquiera, construye un nuevo polígono de un lado más y cuya área sea igual a la del polígono inicial.

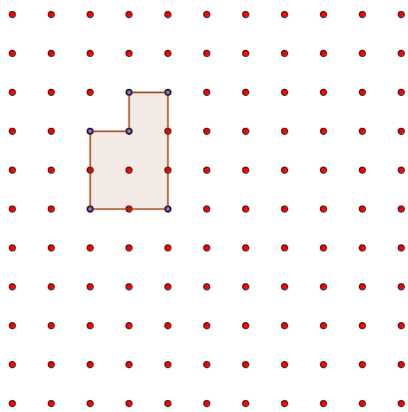


C) Cuadriláteros cíclicos: Cuatro puntos de una circunferencia determinan un cuadrilátero que recibe el nombre de cíclico, obtenido uniendo cada punto con el punto contiguo. Si ABCD es un cuadrilátero cíclico, y M y N son los puntos de intersección de los lados opuestos. Comprueba que la intersección de las bisectrices de los ángulos en estos puntos M y N con el cuadrilátero inicial determinan cuatro puntos A', B', C' y D' que forman un rombo.



D) En el rectángulo ABCD, E es el punto medio del lado BC y F es el punto medio del lado CD. Dibuja el cuadrilátero AECF e intenta determinar su área en función del área del rectángulo inicial.

Geoplano



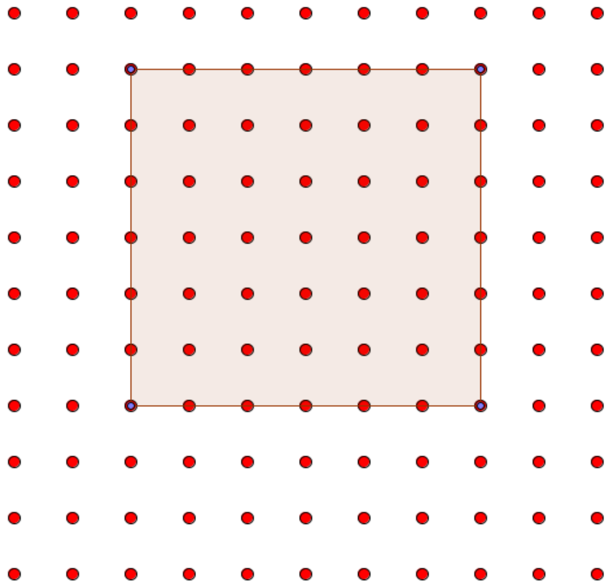
A) Activa la cuadrícula y la atracción de puntos a la cuadrícula. Dibuja una figura cualquiera utilizando la herramienta *Polígono*.

Intenta dibujar en otra posición del geoplano otra figura distinta que tenga:

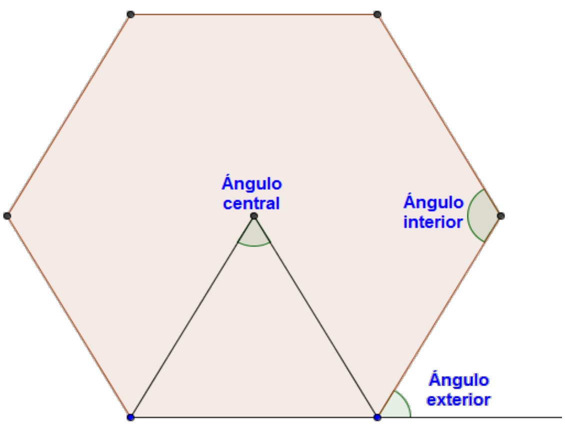
a) El mismo perímetro.
b) El misma área.
c) El mismo perímetro y la misma área.
d) El doble de perímetro.
e) La mitad del área.

B) Crea todos polígonos que puedas de manera que solo tengan un punto interior. Calcula su área y su perímetro considerando que la distancia entre dos puntos es 1
Averigua cuál tiene mayor perímetro y mayor área.

C) Dividir un cuadrado.
Aprovechando el geoplano que puedes construir en GeoGebra. Dibuja un cuadrado.
Intenta dividirlo en dos partes de igual área.
¿Hay más de una forma de obtener la división anterior?



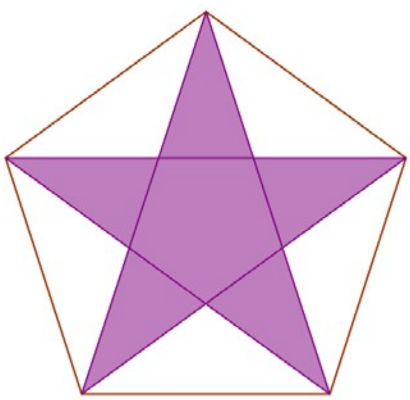
Ángulos de un polígono regular



En un polígono podemos dibujar los ángulos siguientes:

Investiga la medida de estos ángulos en los distintos polígonos regulares.

Encuentra alguna relación para determinar los ángulos para cualquier polígono regular en relación al número de lados del mismo

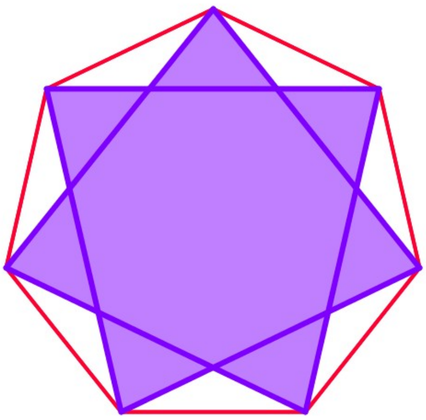


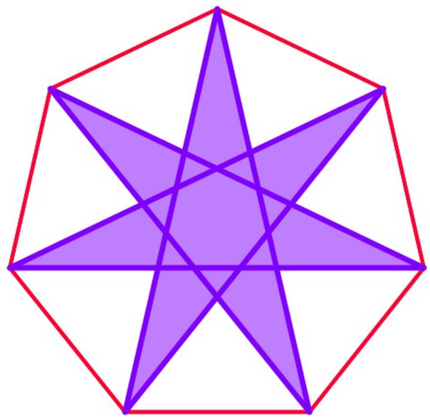
Polígonos estrellados

Si en un polígono regular unimos los vértices no consecutivos se obtienen los diferentes polígonos estrellados

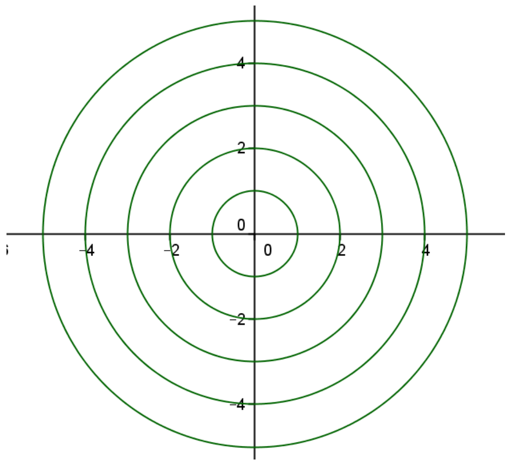
En el caso del pentágono regular lo podemos hacer uniendo los vértices cada dos, obteniendo

Si partimos un polígono de siete lados podemos obtener dos polígonos estrellados





Encuentra todos los polígonos estrellados para polígonos regulares de 8, 9, 10 y 11 lados. ¿Qué conclusiones puedes sacar?



Comando Secuencia

El comando secuencia que nos permitirá obtener figuras que sigan un patrón.

Es importante conocer la sintaxis que utiliza este comando que incorpora varios argumentos

Secuencia[expresión, variable, valor inicial, valor final, incremento]

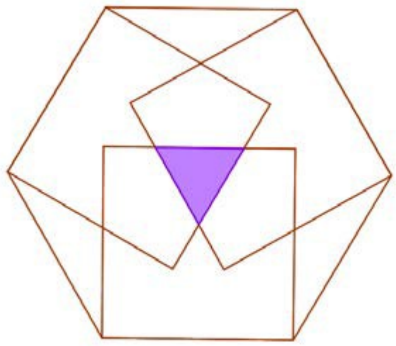
Por ejemplo, al introducir el comando: **Secuencia[Circunferencia[(0,0),r],r,1,5]** obtendremos cinco circunferencias concéntricas de centro (0,0) cuyos radios serán de 1, 2, 3, 4 y 5 unidades (el incremento de la variable es 1 por defecto)

Dibuja las siguientes figuras geométrica utilizando los comandos **Segmento[A,B]**; **Polígono[A,B, n]** y **Circunferencia[A,r]**

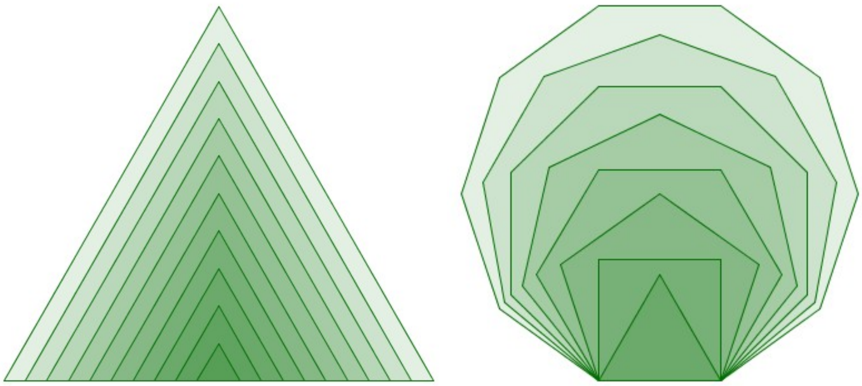
POLÍGONOS. PROBLEMAS (2ª parte)

Problema_P6.

Reproduce la siguiente figura y halla el área del triángulo interior en función del hexágono regular inicial

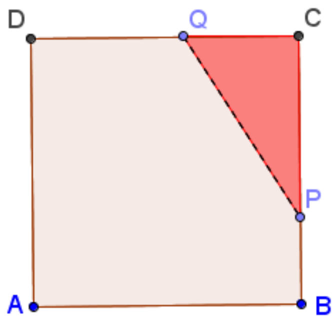


Problema_P7. Utilizando el comando **Secuencia** reproduce las siguientes figuras



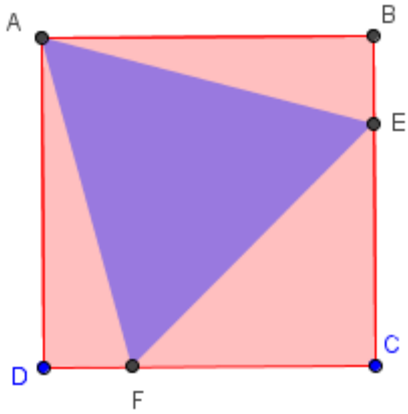
Problema_P8.

Dado un cuadrado ABCD, encuentra dos puntos P y Q; uno en el lado CD y otro en el lado BC, de forma que al cortar dicho cuadrado por el segmento PQ el área del triángulo sea la tercera parte del área del cuadrado.



Problema_P9.

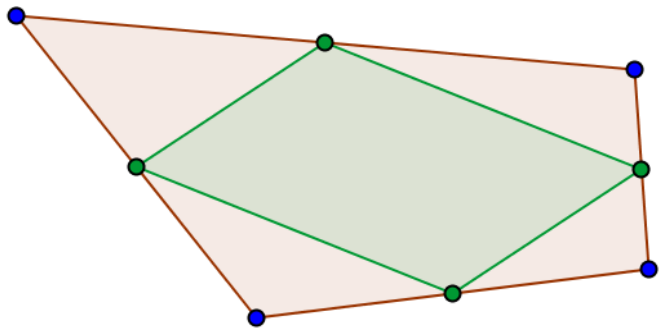
Dado un cuadrado ABCD construye un triángulo equilátero de modo que sus vértices sean AEF, donde E es un punto sobre el lado BC y F un punto sobre el lado DC.



Investigando con cuadriláteros

1.1 El paralelogramo de Varignon

Si unimos los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera obtenemos... ¿un paralelogramo?



Compruébalo con GeoGebra

- Selecciona la herramienta **Polígono** y haz clic sobre cuatro puntos cualesquiera de la vista gráfica: de ese modo construyes el cuadrilátero ABCD.

  Observa la ventana algebraica y comprueba que GeoGebra te ha creado cuatro puntos A, B, C y D, que son los vértices del cuadrilátero, cuatro segmentos a, b, c y d, que son sus lados, y un objeto que ha denominado polígono1. En el caso de los puntos, te muestra las coordenadas; en el caso de los segmentos, que son los lados del polígono construido, se indica su longitud; el valor que asigna al objeto polígono1 es, precisamente, su área.

- Selecciona la herramienta **Punto medio o centro** y haz clic, uno a uno, sobre los cuatro lados del cuadrilátero que has construido. Construyes de ese modo los puntos medios E, F, G y H de los lados del cuadrilátero anterior.

- Vuelve a seleccionar la herramienta **Polígono** y haz clic ahora, consecutivamente, sobre los puntos medios de los lados del cuadrilátero ABCD. Compara su área (el valor asignado a polígono2) con la del cuadrilátero inicial.

- Selecciona ahora la herramienta **Relación entre Dos Objetos** y señala dos a dos los lados supuestamente iguales del cuadrilátero que has construido al unir los puntos medios del cuadrilátero original: GeoGebra te ayudará a compararlos. ¿Qué conclusión puedes sacar? ¿Es un paralelogramo?

- Mueve los vértices del cuadrilátero original, ¿sigue siendo un paralelogramo el cuadrilátero que se obtiene al unir los puntos medios?

Elaborado por:
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL

Se conoce como **Paralelogramo de Varignon** al paralelogramo así construido. Has podido comprobar que el área del paralelogramo de Varignon es justamente la mitad que la del cuadrilátero en que se inscribe, ¿serías capaz de demostrarlo?
Las características del cuadrilátero de partida condicionan la forma concreta de su paralelogramo de Varignon, de modo que en determinadas circunstancias se obtiene un cuadrado, un rombo, un rectángulo o un romboide. ¡Vamos a investigarlo!

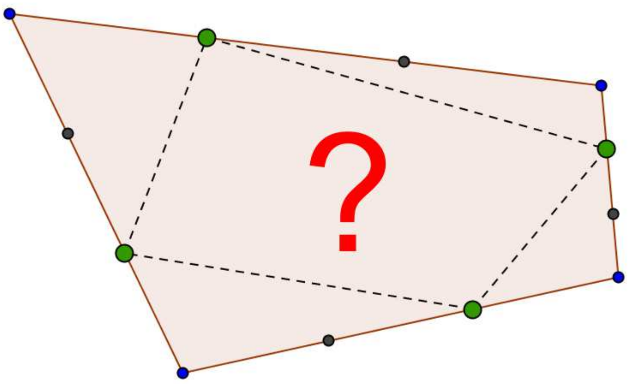
Investiga con GeoGebra

- Mueve los vértices del cuadrilátero original e investiga:
    - ¿Cómo tiene que ser el cuadrilátero original para que el paralelogramo de Varignon sea un cuadrado?
    - ¿Y para que sea un rombo?
    - ¿En qué casos se obtiene un rectángulo?

¿Qué pasaría si…?

Para obtener el paralelogramo de Varignon hemos unido los puntos medios de los lados de un cuadrilátero, pero, podemos estudiar otros casos:

- ¿qué pasaría si, en vez de tomar los puntos medios de los lados, uniéramos entre sí los puntos de cada lado, situados a 1/3 de un vértice y 2/3 del otro, del modo que se indica en la siguiente figura? El cuadrilátero resultante, ¿será también un paralelogramo?

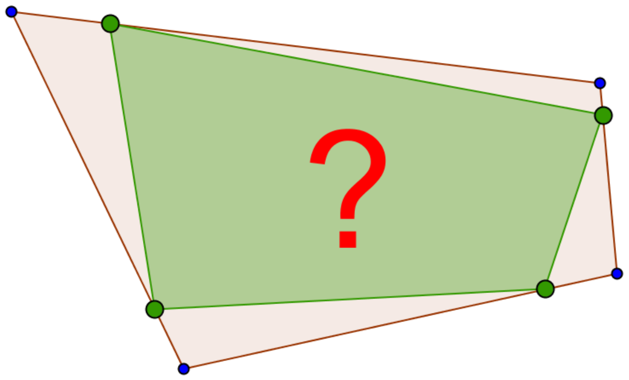


- ¿Cuál será la razón entre el área del cuadrilátero obtenido al unir tales puntos y el área del cuadrilátero de partida? ¿Es también 1/2?
- ¿Y si unimos ahora los puntos situados a 1/4 del vértice? ¿O los situados a 1/5 del vértice?…

Elaborado por:
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL

- ¿Y si generalizamos? El cuadrilátero obtenido al unir los puntos situados a 1/n de los vértices del cuadrilátero de partida, ¿será un paralelogramo?

¡Vamos a investigarlo!



Investiga con GeoGebra

- Selecciona la herramienta **Polígono** y haz clic sobre cuatro puntos cualesquiera de la vista gráfica: de ese modo construyes el cuadrilátero ABCD.
- Selecciona la herramienta **Deslizador** y haz clic en un punto de la parte superior izquierda de la vista gráfica. En la ventana que se abre selecciona la opción **Entero** y acepta los valores que se ofrecen. De este modo hemos creado un parámetro que puede tomar valores enteros entre 1 y 30.
- Sitúa el cursor en la **Barra de Entrada** y escribe **A+1/n (B-A)**

  De este modo creas un punto sobre el lado AB, situado a 1/n del punto A. Mueve ahora el deslizador y observa cómo el punto creado se sitúa a 1/2, 1/3, 1/4... de A.
- De modo análogo, introduce, a través de la **Barra de Entrada** las expresiones:

  B+1/n (C-B)

  C+1/n (D-C)

  D+1/n (A-D)

  Habrás creado de ese modo, un punto sobre cada lado situado a 1/n de los vértices A, B, C y D, respectivamente.
- Cambia las propiedades de los cuatro puntos que has creado: aumenta un poco su tamaño y selecciona un color que los resalte.

Elaborado por:
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL

- Cambia las propiedades del polígono: modifica su color y aumenta también la intensidad del sombreado.
- Mueve ahora el deslizador y observa el resultado: el cuadrilátero que has construido, ¿es un paralelogramo?
- Modifica el cuadrilátero original, moviendo alguno de sus vértices y comprueba tu conjetura.

Recuerda que el área del paralelogramo de Varignon era justamente la mitad del área del cuadrilátero en el que lo construíamos. La razón entre las áreas de ambos era, por tanto, 1/2 y dicha razón se mantenía constante cualquiera que sea la forma del cuadrilátero original. Investiguemos qué ocurre en este caso:

- ¿Cuál será la razón entre el área del cuadrilátero que obtenemos al unir los puntos situados a 1/n del vértice y el área del cuadrilátero de partida?
- Para un determinado valor de n, ¿se mantendrá constante esa razón si modificamos el cuadrilátero original, moviendo sus vértices?

¡Sigamos investigando!

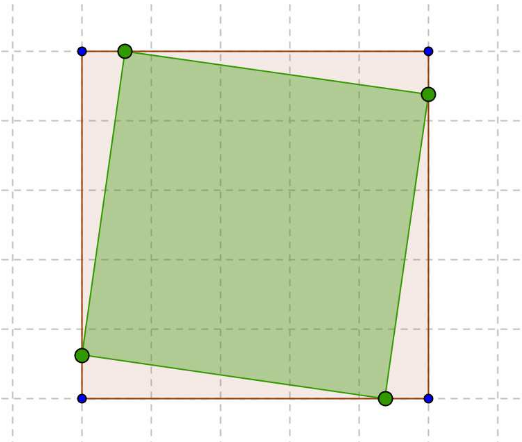
Investiga con GeoGebra

- Vamos a calcular la razón entre las áreas de los cuadriláteros. Si no la tienes abierta, abre la ventana algebraica desde la barra de menús, opción **Vista/Vista Algebraica**.
- En la ventana algebraica, ordena los objetos por **Tipo de Objeto**.
- Observa que has creado dos cuadriláteros a los que el programa ha denominado **polígono1** y **polígono2**. Observa también que se les ha asignado un número: ese número indica su área, en unidades cuadradas.
- Escribe, en la **Barra de Entrada**: **r=polígono2/polígono1**
- En la ventana algebraica, ordenada por tipo de objeto, encontrarás el valor de r en el grupo de Número, debajo del deslizador n. Selecciona r y arrástralo hasta la vista gráfica. Colócalo a la derecha del deslizador n.
- Mueve el deslizador n y observa los valores que va tomando r. Si n=2, ¿cuánto vale r? ¿Coincide con lo que esperabas?
- ¿Cuánto vale r cuando n=3? ¿Cambia ese valor si modificas el cuadrilátero de partida?
- ¿Cuánto vale r cuando n=4? ¿Cambia si modificas el cuadrilátero de partida?
- Vete tomando valores de n cada vez mayores. ¿Hacia qué valor se aproxima r?

Elaborado por:
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL

Has podido apreciar que la razón entre las áreas de los cuadriláteros varía con n, pero no depende de la forma del cuadrilátero del que partimos. De modo que, si depende únicamente del número de partes n en que hemos dividido los lados del cuadrilátero de partida, cabría plantearse si será posible encontrar una fórmula que nos permita calcular la razón entre las áreas del cuadrilátero inscrito y el cuadrilátero de partida, en función de n. Vamos a intentarlo.

Si la forma del cuadrilátero no interviene en el valor de la razón, vamos a aprovecharnos de ello. Vamos a partir de un cuadrilátero que nos facilitará las cosas: un cuadrado.



Investiga con GeoGebra

- En la **Vista Gráfica** activa la cuadrícula. Selecciona también la opción **Fijado a cuadrícula**.
- Mueve los vértices del cuadrilátero de partida hasta situarlos en puntos de la cuadrícula, de modo que formen un cuadrado.
- Mueve ahora el deslizador n y observa el cuadrilátero inscrito, ¿qué forma tiene? ¿Cambia la forma de ese cuadrilátero cuando varía n?
- Fíja ahora el deslizador n en un valor concreto, por ejemplo 8. Al trabajar sobre una cuadrícula, te resulta muy sencillo calcular el área del cuadrilátero original, ya que ahora es un cuadrado. Para hallar el área del cuadrado inscrito solamente necesitas calcular la longitud de su lado. Observa los triángulos rectángulos que forman los lados del cuadrado inscrito con los segmentos que determina sobre los lados del cuadrado original. ¿Cuánto miden los catetos de dichos triángulos rectángulos? ¿Y la hipotenusa? ¿Cuál es, por tanto, el área del cuadrado inscrito?
- Calcula ahora la razón entre el área del cuadrado inscrito y la del cuadrado original. ¿Qué resultado obtienes?

Elaborado por:
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL

Ahora es el momento de generalizar lo que has descubierto.

Haz los cálculos, pero ahora dejándolo todo en función de n: supón que el lado del cuadrado original es 1 y, por tanto, el cateto menor de los triángulos rectángulos que hemos manejado es 1/n.

- ¿Cuál sería entonces, en función de n, la longitud del otro cateto de dichos triángulos rectángulos? ¿Y la longitud de la hipotenusa?
- Por tanto, ¿cuál sería, en función de n, el área del cuadrado inscrito?
- Encuentra ahora una expresión algebraica para la razón entre el área del cuadrado inscrito y la del cuadrado de partida, en función de n. Recuerda que hemos tomado como longitud del lado del cuadrado de partida 1, de modo que su área también será de 1 unidad.

Comprueba con GeoGebra

- Comprueba tu expresión para diferentes valores de n: sustituye n por un valor concreto en la expresión y calcula el valor de la razón; compara ahora el resultado que has obtenido con el que te proporciona la construcción de GeoGebra al fijar el deslizador n en el valor que has utilizado.
- Mueve los vértices del cuadrado original, de modo que ya no formen un cuadrado. ¿Se sigue manteniendo la relación que has encontrado?

Es el momento de escribir nuestras conclusiones: elabora un informe sobre la investigación que has realizado y las conclusiones a las que has llegado.

Elaborado por:
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL