ESTALMAT

ESTÍMULO DEL TALENTO MATEMÁTICO

INT3GR1D4D D3 LA TR4NSMS1ON D3 DATOS

pablo1996@gmail.com
@PabloMartinPi

ACCEDE A ...

https://pollev.com/pablomartin241

¿Cuál es el mejor número?

0

1

Pi

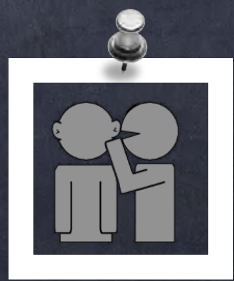
73

INTRODUCCIÓN

Hay dos tipos de problemas que se plantean en la comunicación.

El primero consiste en la transmisión fiel de la información: se trata de evitar errores en la transmisión... o manipulaciones (incluso, si es posible, corregirlos).

El segundo es la necesidad de transmitir mensajes de una manera segura: si la información tiene un cierto valor es deseable que sólo el destinatario pueda entenderlo o utilizarlo.



INTRODUCCIÓN

Las matemáticas, especialmente el álgebra y la divisibilidad, tienen mucho que decir en ambos tipos de problemas, pero hoy vamos a centrarnos sólo en el primero

¿CÓMO EVITAR LOS ERRORES?

CONCEPTOS MATEMÁTICOS BÁSICOS 1:
ARITMÉTICA MODULAR

Dados dos números enteros a, b y un número natural m se dice que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es divisible entre m. Se denota:

$$a \equiv b \ mod \ m$$

(Es el nombre que se le da a la forma de contar las horas del reloj en matemáticas)

Ejemplo:

$14 \equiv 2 \ mod \ 12$ porque $14 - 2 = 12$ que es múltiplo de 12

EJEMPLO:

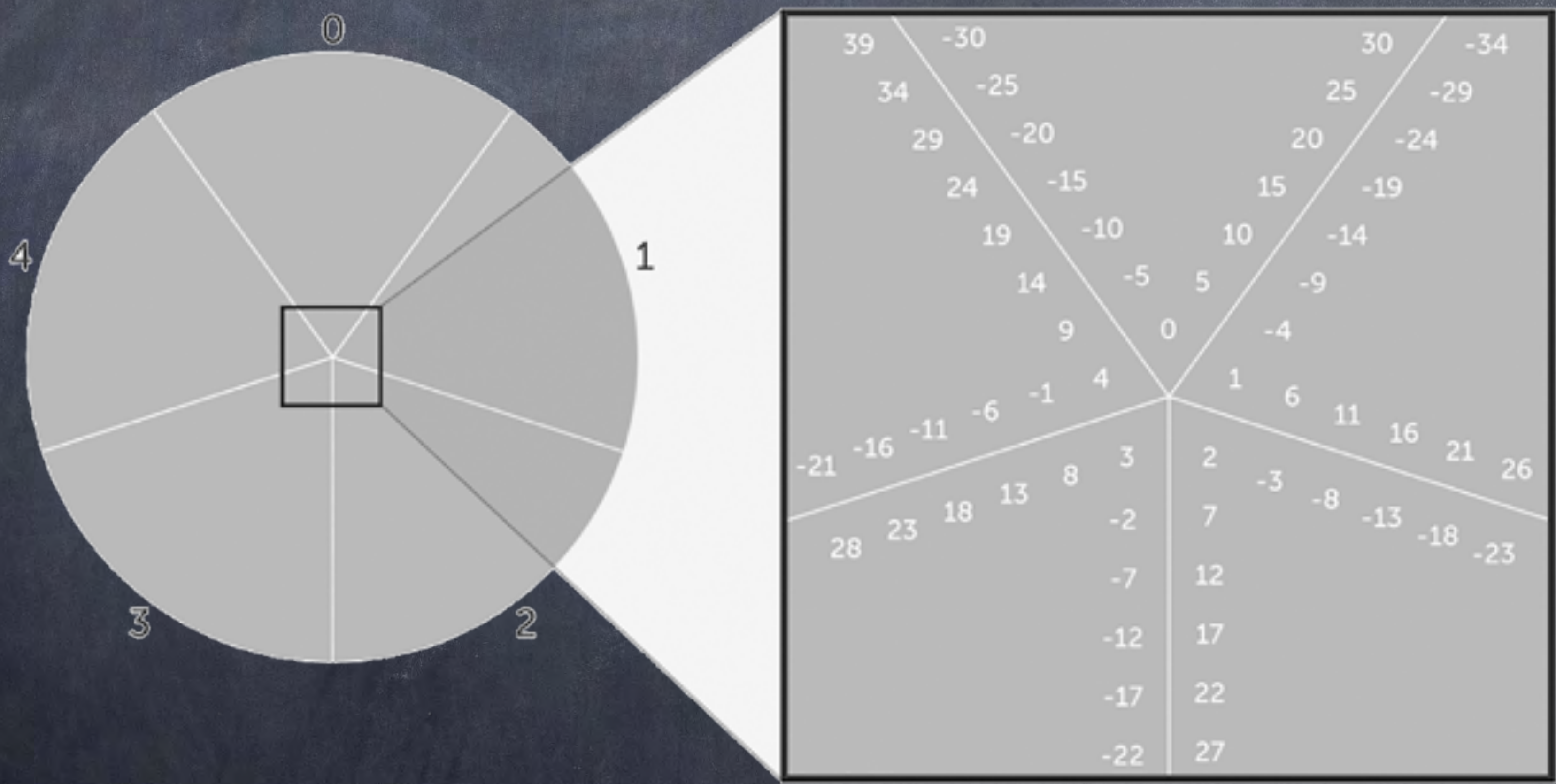
Si son las 10 ¿Qué hora será dentro de 8532h?

Respuesta: 10 + 8532 = 8542 dividiendo entre 12 obtenemos 711 de cociente y 10 de resto, por tanto

$$8542 \equiv 10 \ mod \ 12$$

¿Cómo podemos calcular cociente y resto de una división con la calculadora?

CONCEPTOS MATEMÁTICOS BÁSICOS 1: ARITMÉTICA MODULAR



CONCEPTOS MATEMÁTICOS BÁSICOS 2:
PRODUCTO ESCALAR

Dados dos conjuntos de n números reales $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ se llama producto escalar al número

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

(Se denota con el mismo símbolo del producto de números reales)

Ejemplos:

$(1,3,-2) \cdot (2,0,5) = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + (-2) \cdot 5 = -8$

$(5,7) \cdot (4,2) = 5 \cdot 4 + 7 \cdot 2 = 34$

CONCEPTOS MATEMÁTICOS BÁSICOS 2:
PRODUCTO ESCALAR

Este concepto es fundamental en Matemáticas, uno de sus usos habituales es en los espacios vectoriales y afines, pues sirve para definir la medida, tanto de distancias como de ángulos (incluyendo paralelismo y perpendicularidad o proyecciones). También en Física donde se utiliza para en la definición de algunas magnitudes como el trabajo.

CONCEPTOS MATEMÁTICOS BÁSICOS 2:

PRODUCTO ESCALAR

La aplicación que vamos a usar aquí de esta operación nos servirá para dar soporte matemático a algunos conceptos. Uno de los usos más interesantes (pese a lo simple) es el trabajo con números y sus cifras o cambiarlas de posición.

$$372 = (3,7,2) \cdot (10^2,10^1,10^0) \qquad = 3 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 2 \cdot 1$$

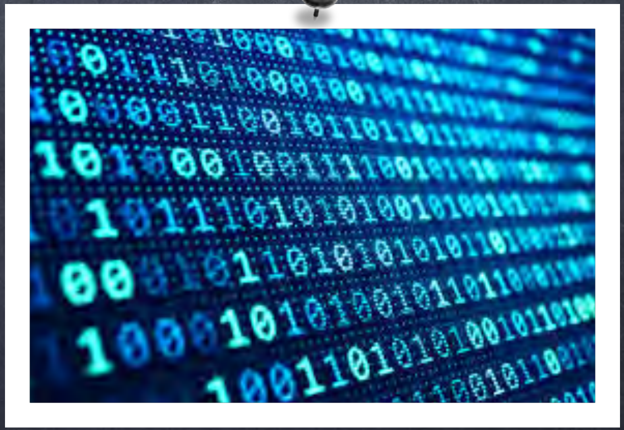
$$327 = (3,2,7) \cdot (10^2,10^1,10^0) \qquad = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

También se utiliza para asignar pesos a determinadas cantidades en algunos de los criterios que emplearemos para establecer dígitos y caracteres de control que permitan detectar (e incluso reparar) errores en la transmisión de datos.

CÓDIGOS

Llamaremos códigos a los sistemas que nos permitan identificar (o incluso corregir) errores en la transmisión de información.

Algunos ejemplos:



REDUNDANCIA

Son palabras o caracteres innecesarios para expresar un concepto por poder sobreentenderse sin ellas (p. ej. "hueco por dentro"). Los lenguajes naturales tienen un cierto grado de redundancia que nos permite interpretar el título de esta sesión a pesar de tener errores en algunas letras.

REDUNDANCIA

Uno de los códigos más básicos consiste en la repetición de la información, enviando cada dato varias veces. El problema de este sistema es que es muy ineficiente, ralentiza mucho las comunicaciones:

PABLO -> PPAABBLLOO

¿Cómo podemos mejorarlo?

BIT DE PARIDAD

El bit de paridad par se usa al transmitir información en sistema binario. Consiste en añadir un dígito extra (habitualmente cada 7 u 8 dígitos) que consiga que cada bloque lleve un número par de unos. Es uno de los métodos más simples y tiene bastantes limitaciones como la de no detectar trasposiciones, pero es su eficacia es muy alta respecto a su "coste" (tiempo y cantidad de datos extra).

7 bits de datos	byte con bit de paridad	
	par	impar
0000000	0000000**0**	0000000**1**
1010001	1010001**1**	1010001**0**
1101001	1101001**0**	1101001**1**
1111111	1111111**1**	1111111**0**

APLICACIONES

LETRA DEL DNI:

Una ampliación del concepto de bit de paridad es de de dígito (o letra) de control, por ejemplo en los DNI se asigna una letra.

Se calcula la clase de equivalencia módulo 23 y se consulta la siguiente tabla

Resto	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Letra	T	R	W	A	G	M	Y	F	P	D	X	B
Resto	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
Letra	N	J	Z	S	Q	V	H	L	C	K	E	

¿Cuáles crees que pueden ser los motivos para eliminar esas 4 letras?

Top

APLICACIONES

NÚMEROS DE TARJETA DE CRÉDITO

Las tarjetas de crédito se identifican con un número de 16 cifras (que por facilidad de lectura se agrupan de 4 en 4). Los 4 primeros identifican la entidad financiera, el quinto el tipo de tarjeta (Visa, American Express...) los 10 siguientes dígitos identifican al usuario y el último es un dígito de control...

APLICACIONES

...se usa el algoritmo de Luhn (se consideran las posiciones de las cifras siempre de izquierda a derecha)

APLICACIONES

Se toman las cifras que están en posición impar y se calcula su producto por 2 (si el resultado tiene mas de una cifra, estas se suman) y se suman los resultados. Se añade la suma de las cifras que están en posición par (excepto el dígito de control) y, llamamos X al resultado anterior módulo 10. El dígito de control debe ser tal que, al sumarlo a X el resultado sea congruente con 0 módulo 10

APLICACIONES

Puedes comprobar fácilmente que esta tarjeta es falsa:

Algoritmo de Luhn:

Nº tarjeta	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Cifras p. impar	1		3		5		7		1		3		5		7		
Doble (1 cifra)	2		6		1		5		2		6		1		5		28
Cifras p. par		2		4		6		8		2		4		6		-	32
Suma (modulo 10)																	0

Por tanto, el dígito de control debe ser 0 (para que $0 + DC \equiv 0 \; mod \; 10$)

¿Qué ventajas crees que aporta la multiplicación por 2 en algunas cifras y en otras no?

APLICACIONES SIMILARES

8 412345 678905

A B C D

ISBN 978-987-25620-2-1

9 789872 562021

TEOREMA

La capacidad de detectar errores de un código viene dada por el siguiente resultado:

Si un número de identificación $x_1x_2 \dots x_k$ satisface la condición

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \cdot (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = 0 \ (mod\ n)$$

Entonces, se detectarán errores por el código si:

Tipo de error	**Condición para ser detectado**
Error simple	$mcd(\lambda_i, n) = 1$
Error por trasposición	$mcd(\lambda_{i+1} - \lambda_i, n) = 1$
Error de trasposición por salto	$mcd\left(\lambda_i - \lambda_j, n\right) = 1$

ACTIVIDADES

1. Las tablas de sumar y multiplicar módulo 2 son:

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	0

·	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1

Comprueba que las tablas funcionan bien:

$7 \equiv 1\ (mod\ 2), \qquad 6 \equiv 0\ mod(2) \qquad \Rightarrow \qquad 7 \cdot 6 = 1 \cdot 0 = 0$

($7 \cdot 6 = 42$ que es par, es decir, su resto al dividirlo por 2 es 0)

a. $87653199825 + 25931244524$

b. $87653199825 \cdot 25931244524$

Describe cómo le podrías explicar a un estudiante de 2.º de primaria (que acaba de aprender a multiplicar) los resultados obtenidos.

Realiza tú las tablas de sumar y multiplicar módulo 5

a. 1

b. 0

En primaria diríamos:

Par · Par = Par, Par · Impar = Par

Impar · Par = Par, Impar · Impar = Impar

En cuanto a las tablas módulo 5:

Realiza tú las tablas de sumar y multiplicar módulo 5

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

ACTIVIDADES

2. Describe, utilizando el concepto de producto escalar el aspecto que debe tener un número de 3 cifras para ser capicúa. Intercambia la cifra de las unidades y la cifra de las decenas (el nuevo número no será capicúa). Escribe una ecuación que describa que la diferencia entre el número capicúa y el segundo número es -27. Escribe una ecuación que describa que la suma de las 3 cifras del número original sea 9. Resuelve el sistema anterior y calcula el único número que cumple dichas condiciones.

El número pedido es...

$$(x, y, x) \cdot (10^2, 10^1, 10^0)$$
$$(x, x, y) \cdot (10^2, 10^1, 10^0)$$

Números:

$$(x, y, x) \cdot (10^2, 10^1, 10^0) = 100x + 10y + x = 101x + 10y$$
$$(x, x, y) \cdot (10^2, 10^1, 10^0) = 100x + 10x + y = 110x + y$$

Diferencia de ambos números es -27:

$$(101x + 10y) - (110x + y) = -27$$
$$-9x + 9y = -27$$

Suma de las cifras del número original:

$$x + y + x = 9$$
$$2x + y = 9$$

$$\begin{cases} -9x + 11y = -27 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$$

Solución:

$$x = 4 \qquad y = 1$$

Número:

$$414$$

ACTIVIDADES

3. Encuentra el DNI falso, ¿puedes garantizar la validez del otro?

Resto	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Letra	T	R	W	A	G	M	Y	F	P	D	X	B
Resto	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
Letra	N	J	Z	S	Q	V	H	L	C	K	E	

¿Son verdaderos o falsos los DNI?

Ambos son verdaderos

El primero es verdadero y el segundo falso

El primero es falso y el segundo verdadero

Ambos son falsos

$$12345678 : 23 = 536768 \ (R = 14)$$

$$99999999 : 23 = 4347826 \ (R = 1)$$

Por tanto, el primer DNI debería tener letra: Z

(Y, por tanto, sabemos con certeza que es falso)

El segundo DNI tiene la letra correcta: R

(Es, aparentemente, correcto pero no hay una garantía del 100%)

ACTIVIDADES

4. Comprueba si la tarjeta de crédito siguiente está correctamente escaneada:

Se toman las cifras que están en posición impar y se calcula su producto por 2 (si el resultado tiene mas de una cifra, estas se suman) y se suman los resultados. Se añade la suma de las cifras que están en posición par (excepto el dígito de control) y, llamamos X al resultado anterior módulo 10. El dígito de control debe ser tal que, al sumarlo a X el resultado sea congruente con 0 módulo 10

Cuando la encuesta esté activa, responde en **PollEv.com/pablomartin241**

El DC de la tarjeta es...

Start the presentation to see live content. For screen share software, share the entire screen. Get help at **pollev.com/app**

Nº tarjeta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	Total
Cifras p. impar	1		3		5		7		9		7		5		3		
Doble (1 cifra)	2		6		1		5		9		5		1		6		35
Cifras p. par		2		4		6		8		8		6		4		-	38
Suma (módulo 10)																	3

Por tanto el dígito de control debe ser 7:

$$3 + DC \equiv 0 \ mod(10)$$

Al ser el DC impreso 2 podemos garantizar que la tarjeta está mal escaneada

Esto ha sido todo por hoy.
¡Hasta el próximo día!

pablo1996@gmail.com
@PabloMartinPi