CUADERNO DE MATEMÁTICAS

3º ESO ACADÉMICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
IES "EMILIO FERRARI"

TEMA 1. Fracciones y decimales

Recordemos los diferentes tipos de números que conocemos. Por un lado, tenemos los **números naturales**, que son aquellos que utilizamos para "contar cosas". Son infinitos (ya que si nos ponemos a contar siempre podemos añadir una unidad o "cosa" más a las que ya habíamos contado) y nos referimos a ellos con $\mathbb{N}$. Por tanto, los números naturales son:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Además de estos números que ya conocíamos, podemos tomar para cada uno de ellos su opuesto, por ejemplo, para el numero 5 podemos tomar su opuesto -5. El conjunto de los numero naturales y sus opuestos lo denominamos **números enteros** y lo representamos por $\mathbb{Z}$. Por tanto,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Usando estos dos tipos de números podemos definir uno nuevo, que denominamos **números racionales y** representamos por $\mathbb{Q}$. Estos números los podemos poner en forma de fracción y aparecen cuando tomamos un número entero en el numerador y uno natural en denominador. Por ejemplo, cuando tomamos el -2 en el numerador y el 3 en el denominador obtenemos el número racional $\frac{-2}{3}$. Es decir, los números racionales son aquellos que podemos expresarlos en la forma de **fracciones**.

EJERCICIO: Da un ejemplo:

a) Que sea un número natural.
b) Que sea un número entero, pero no natural.
c) El número racional que surja del uso de los números anteriores como denominador y numerador respectivamente.
d) Un número racional, que también sea entero.

1. Fracciones

Como ya hemos visto, cuando hablamos de números racionales, hablamos también de fracciones, por lo tanto, cuando queramos operar con números racionales tendremos que operar con fracciones.

1.1. Simplificación de fracciones

Si en una fracción el numerador y el denominador se pueden dividir por el mismo número (distinto de 1 y -1) y los dividimos por dicho número, decimos que **hemos reducido o simplificado la fracción**.

Si una fracción no se puede reducir más y su denominador es positivo diremos que la fracción es **irreducible**. Por ejemplo:

$$\frac{10}{20}(\text{reducible entre } 2) \rightarrow \frac{5}{10}(\text{reducible entre } 5) \rightarrow \frac{1}{2}\ (\text{irreducible})$$

EJERCICIO

1. Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\frac{24}{60}$ b) $\frac{114}{72}$ c)$\frac{26}{39}$ d)$\frac{125}{50}$ e)$\frac{225}{400}$

2. Simplifica los números $-\frac{16}{24}$ y $\frac{35}{15}$.

3. Completa los espacios en blanco:

a) $\frac{2}{5}$ de $200 = \cdots$ b) $\frac{8}{7}$ de $140 = \cdots$ c) $\frac{3}{4}$ de $\ldots = 450$ d) $\frac{2}{9}$ de $\ldots = 60$

1.2. Fracciones equivalentes

Dos fracciones son equivalentes son equivalentes si al reducirlas obtenemos la misma fracción irreducible. Por ejemplo:

$$\frac{4}{6}(\text{reducible entre } 2) \to \frac{2}{3} \qquad \frac{12}{18}(\text{reducible entre } 6) \to \frac{2}{3}$$

Por tanto, $\frac{4}{6}$,$\frac{12}{18}$ y $\frac{2}{3}$ son fracciones equivalentes. De hecho, podemos expresarlo como $\frac{4}{6} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

1.3. Comparación de fracciones

Para poder comparar dos fracciones necesitamos que ambas tengan el mismo denominador. Para poder tenerlo, necesitamos transformarlas en la fracción equivalente que tenga por denominador el mínimo común múltiplo de los dos denominadores. Por ejemplo, ¿cuál es mayor, $\frac{7}{12}$ o $\frac{5}{8}$? Tenemos que $\text{m.c.m.}(12,8) = 24$, por tanto:

$$\frac{7}{12} = \frac{14}{24} \qquad \frac{5}{8} = \frac{15}{24}$$

Como $\frac{14}{24} < \frac{15}{24}$, podemos saber que $\frac{7}{12} < \frac{5}{8}$.

EJERCICIO:

4. Compara las siguientes fracciones:

a) $\frac{3}{4}\ y\ \frac{4}{3}$ b) $\frac{6}{8}\ y\ \frac{7}{8}$ c) $\frac{3}{5}\ y\ \frac{6}{10}$ d) $3\ y\ \frac{11}{2}$

5. Ordena de mayor a menor $\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$ y 1

1.4. Suma de fracciones

Cuando sumamos fracciones, las transformamos en unas fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador y una vez lo tienen, sumamos sus numeradores, dejando igual su denominador. Por ejemplo:

$$\frac{7}{6} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7+4}{6} = \frac{11}{6}$$

1.5. Producto de fracciones

Cuando multiplicamos fracciones, multiplicamos los numeradores entre ellos y los denominadores entre ellos. Por ejemplo:

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}=\frac{2\cdot 4}{5\cdot 3}=\frac{8}{15}$$

1.6. Cociente de fracciones

Cuando dividimos fracciones, es equivalente a multiplicar la primera por la inversa de la segunda. Recordemos que la inversa de una fracción es aquella que tiene como numerador el denominador de la original y como denominador el numerador de la original. Por ejemplo, sabiendo que $\frac{7}{5}$ es el inverso de $\frac{5}{7}$, tenemos que:

$$\frac{2}{3}:\frac{5}{7}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 5}=\frac{14}{15}$$

EJERCICIO:

6. Realiza las siguientes operaciones con fracciones:

a) $\frac{7}{9}+\frac{11}{12}$

b) $6-\frac{11}{4}$

c) $3\cdot\frac{4}{5}$

d) $6:\frac{4}{5}$

e) $\frac{4}{5}:6$

f) $\frac{4}{5}:\frac{1}{6}$

g) $\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{6}-\frac{7}{8}\right):\frac{25}{12}$

h) $\left(\frac{13}{15}-\frac{7}{25}\right)\cdot\left(\frac{9}{22}+\frac{-13}{33}\right)$

i) $5:\left(\frac{2}{4}+1\right)-3:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$

1.7. Operaciones combinadas

Recuerda la prioridad de las operaciones:

1. Paréntesis.
2. Potencias y raíces.
3. Multiplicaciones y divisiones.
4. Sumas y restas.

Además, procura trabajar siempre de dentro hacia afuera y recuerda que *"lo que no se opera se copia igual"*.

Ejemplos:

$$\frac{7}{10}-\left[2-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\right)\right]=\frac{7}{10}-\left[2-\left(\frac{6}{4}+\frac{1}{4}\right)\right]=\frac{7}{10}-\left[2-\frac{7}{4}\right]=\frac{7}{10}-\left(\frac{8-7}{4}\right)=\frac{7}{10}-\frac{1}{4}=\frac{14}{20}-\frac{5}{20}=\frac{9}{20}$$

$$\left[1-4\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right]\cdot\frac{3}{2}=\left[1-4\cdot\left(\frac{3}{6}-\frac{2}{6}\right)\right]\cdot\frac{3}{2}=\left[1-4\cdot\frac{1}{6}\right]\cdot\frac{3}{2}=\left[1-\frac{4}{6}\right]\cdot\frac{3}{2}=\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{2}=\left(\frac{3-2}{3}\right)\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}$$
$$=\frac{1\cdot 3}{3\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

7. Calcula y simplifica el resultado.

a) $5-3\cdot\left(\frac{1}{8}-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)$

b) $\left(\frac{2}{3}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+5\right)-\left(4+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(2-\frac{1}{3}\right)$

c) $\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{6}\right):\left[\left(\frac{2}{3}-1\right)\cdot\frac{1}{4}-\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{8}\right)\right]$

d) $\frac{13}{15}-\left[\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}-\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{9}-1\right)\right]\cdot\frac{4}{3}-\left(-\frac{1}{5}\right)$

8. Calcula:

a) $\frac{2}{5}-\frac{4}{3}:\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right):\frac{5}{3}-\frac{3}{5}$

b) $\left[\frac{4}{5}-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{8}{15}-\frac{7}{9}\right)\right]:\frac{2}{3}$

c) $\left[\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{8}{15}-\frac{7}{18}\right)\right]:\left(\frac{4}{5}-\frac{7}{9}\right)$

d) $\frac{2}{5}-\left[\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{5}\right)\right]+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{7}$

e) $\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{2}{4}+\frac{5}{3}}{\frac{6}{3}+\frac{3}{2}+\frac{5}{6}-\frac{9}{4}}$

f) $\dfrac{\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{7}{3}-\frac{5}{2}\right)}{\frac{2}{3}+\frac{-5}{4}-\left(\frac{4}{2}-\frac{3}{4}\right)}$

g) $\dfrac{\left(\frac{1}{3}-2\right)\div\left(3-\frac{2}{9}\right)+\frac{1}{3}}{\frac{23}{2}+(-2)\cdot\frac{7}{3}-1}$

h) $\frac{2}{3}\cdot\dfrac{2-\frac{1}{4}}{5-2}-\dfrac{\frac{2}{5}-1}{\frac{1}{4}+3}$

9. Ayer compré una cinta y gasté los 2/3 en empaquetar un regalo. Hoy le he dado a una amiga 1/5 de lo que me sobró y todavía me quedan 20 cm. ¿Qué cantidad de cinta compré

10. Tres amigos se reparten un premio que les ha tocado en un sorteo, de forma que el primero se lleva 3/5 del total; el segundo se lleva 5/8 de lo que queda, y el tercero se lleva 37,5 €. ¿A cuánto ascendía el premio?

11. De un canasto de fruta se estropean los 3/5 de su contenido, comemos los 2/3 del resto y regalamos los últimos 4 kg que quedaban. ¿Cuántos kilos de fruta había en el canasto?

12. Un hortelano planta 1/4 de su huerta de tomates, 2/5 de alubias y el resto, que son 280m2, de patatas. ¿Qué fracción ha plantado de patatas? ¿Cuál es la superficie total de la huerta?

13. El paso de cierta persona equivale a 7/8 de metro. ¿Qué distancia recorre con 1.000 pasos? ¿Cuántos pasos debe dar para recorrer una distancia de 1.400 m.?

14. En un frasco de jarabe caben 3/8 de litro. ¿Cuántos frascos se pueden llenar con cuatro litros y medio de jarabe?

15. Un laboratorio comercializa perfume en frascos que tienen una capacidad de 3/20 de litro. ¿Cuántos litros de perfume se han de fabricar para llenar 1.000 frascos?

16. Un camión cubre la distancia entre dos ciudades en tres horas. En la primera hora hace 3/8 del trayecto, en la segunda los 2/3 de lo que le queda y en la tercera los 80 km restantes. ¿Cuál es la distancia total recorrida?

17. He gastado las tres cuartas partes de mi dinero y me quedan 900 euros. ¿Cuánto tenía?
De un depósito de agua se saca un tercio del contenido y, después 2/5 de lo que quedaba. Si aún quedan 600 litros. ¿Cuánta agua había al principio?

18. ¿Cuántas botellas de 3/4 de litro se pueden llenar con una garrafa de 30 litros?

19. Un vendedor despacha por la mañana las 3/4 partes de las naranjas que tenía. Por la tarde vende 4/5 de las que le quedaban. Si al terminar el día aún le quedan 100 kg. De naranjas. ¿Cuántos kg tenía?

20. Con el contenido de un bidón de agua se han llenado 40 botellas de ¾ de litro. ¿Cuántos litros de agua había en el bidón?

21. Un frasco de perfume tiene una capacidad de 1/20 de litro. ¿Cuántos frascos de perfume se pueden llenar con el contenido de una botella de ¾ de litro?

22. Jacinto come los 2/7 de una tarta y Gabriela los tres quintos del resto. ¿Qué fracción de tarta ha comido Gabriela? ¿Qué fracción queda?

2. Números decimales

Como ya sabemos, los números decimales son números expresados en forma decimal y nos permiten operar y compararlos de forma fácil y eficaz. Tenemos varios tipos de decimales:

- **Decimal exacto:** Son aquellos que tienen un número limitado de cifras decimales. Por ejemplo: 2’4, 7’254, -8’0001, 2.
- **Decimal periódico:** Son aquellos que tienen infinitas cifras decimales que además se repiten periódicamente, es decir, podemos encontrar “sucesiones de números” que se repiten continuamente. Hay dos tipos:
    - **Periódicos puros:** Cuando los periodos que se repiten inmediatamente después de la coma. Por ejemplo: $8,\widehat{125} = 8,12512512..$
    - **Periódicos mixtos:** Cuando la parte periódica no comienza después de la coma, es decir, hay algunos números que no se repiten antes de que empiecen a repetirse. Por ejemplo: $2,30\widehat{72} = 2,3072727..$
- **Decimales no exactos ni periódicos:** Son aquellos que tienen infinitas cifras decimales y no se repiten periódicamente. Por ejemplo: $\pi = 3,1415926535..$

EJERCICIO:

23. Clasifica los siguientes decimales:

a) $3,52$	b) $2,\hat{8}$	c) $1,\widehat{54}$	d) $\sqrt{3} = 1,7320508..$
e) $2,7$	f) $3,52222..$	g) $\pi - 2 = 1,14159..$	h) $6,3454545..$

2.1. Paso de fracción a decimal

Para obtener la expresión decimal de una fracción basta dividir el numerador entre el denominador, calculando todas las posiciones decimales que vayan saliendo durante la división. El resultado de la división puede ser:

- Un **número entero**. Ocurre cuando el numerador es un múltiplo de un denominador. Por ejemplo:

$$\frac{18}{3} = 3 \qquad \frac{-50}{10} = -5$$

- Un **decimal exacto**. Esto solo ocurre si el denominador de la fracción simplificada tiene por factores primos 2 y 5 únicamente. Por ejemplo:

$$\frac{5}{8} = \frac{5}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 0,625 \qquad \frac{63}{50} = \frac{63}{2 \cdot 5 \cdot 5} = 1,26$$

- Un **decimal periódico**. Esto ocurre cuando al menos uno de los factores primos del denominador es distinto de 2 y 5. Por ejemplo:

$$\frac{7}{3} = 2,\hat{3} = 2,333.. \qquad \frac{23}{15} = 2,79\hat{3} = 2,79333..$$

24. Expresa en forma de decimal las siguientes fracciones:

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{24}{25}$ c) $\frac{31}{9}$ d) $\frac{8}{30}$

2.2. Paso de decimal a fracción

El paso de decimal a fracción no es tan sencillo como el de fracción a decimal, pero también debemos saber hacerlo. Podemos separarlo en tres tipos en función del tipo de decimal.

- **De decimal exacto a fracción**. Es muy sencillo. En este caso el denominador es una potencia de base 10. El exponente de la potencia será el número de dígitos que tenga el decimal después de la coma.

$$3,7 = \frac{37}{10} \qquad 5,68 = \frac{568}{1000} \qquad 0,003 = \frac{3}{1000}$$

- **De decimal periódico puro a fracción**. Veámoslo con un ejemplo:

  - **Periodo de una sola cifra:** $N = 5,\hat{4} = 5,4444\ldots$

$$\left.\begin{aligned} 10N &= 54,444\ldots \\ N &= 5,444\ldots \end{aligned}\right\} \text{ Al restar, desaparece la parte decimal:}$$

$$10N - N = 54 - 5 \rightarrow 9N = 49 \rightarrow N = \frac{49}{9}$$

Comprobación: $49 \div 9 = \boxed{5.444444444}$

  - **Periodo con varias cifras:** $N = 6,\widehat{207} = 6,207207207\ldots$

$$\left.\begin{aligned} 1000N &= 6\,207,207207\ldots \\ N &= 6,207207\ldots \end{aligned}\right\} \text{ Al restar, desaparece la parte decimal:}$$

$$1\,000N - N = 6\,207 - 6 \rightarrow 999N = 6\,201 \rightarrow N = \frac{6\,201}{999}$$

Comprobación: $6\,201 \div 999 = \boxed{6.207207207}$

- **De decimal periódico mixto a fracción.** Veamos un ejemplo:

- Pongamos en forma de fracción $N = 2,5\widehat{63}$:

$N =$ 2,5636363… Multiplicamos por 10 para obtener un decimal periódico puro.

$10N =$ 25,636363… Ahora, multiplicamos por 100 para obtener otro con la misma parte decimal.

$1\,000N = 2\,563{,}636363\ldots$ Al restar este al anterior, desaparece la parte decimal. Es decir, se obtiene un número entero.

$$1\,000N - 10N = 2\,563 - 25 \rightarrow 990N = 2\,538 \rightarrow N = \frac{2\,538}{990}$$

Comprobación: $2\,538 \div 990 =$ 2.5636363636

- Otro ejemplo: $N = 0,07\widehat{324} = 0{,}07324324324\ldots$

$100N =$ 7,324324… Se obtiene un periódico puro.

$100\,000N = 7\,324{,}324324\ldots$ Otro, con la misma parte decimal.

$$100\,000N - 100N = 7\,324 - 7 \rightarrow 99\,900N = 7\,317 \rightarrow N = \frac{7\,317}{99\,900}$$

Comprobación: $7\,317 \div 99\,900 =$ 0.07324324324

- **Decimales no periódicos.** Los decimales que tienen infinitas cifras decimales no pueden ser expresados en forma de fracción.

25. Expresa en forma de fracción los siguientes decimales:

a) $6{,}2$ b) $0{,}63$ c) $1{,}0004$ d) $3,\hat{5}$

e) $0,\hat{1}$ f) $2,\hat{7}$ g) $0,\widehat{23}$ h) $41,0\widehat{41}$

i) $40,0\widehat{28}$ j) $5,\hat{9}$ k) $7,0\widehat{09}$ l) $0,\widehat{99}$

26. Escribe en forma decimal las fracciones $\frac{13}{4}$ y $\frac{45}{11}$. Justifica previamente si el decimal va a ser exacto o periódico.

27. Escribe en forma de fracción irreducible los decimales $5{,}2\hat{3}$ y $13{,}42$.

28. Dados los decimales $0{,}6; 0,\hat{6}; 0,\widehat{60}; 0{,}6\hat{1}$:

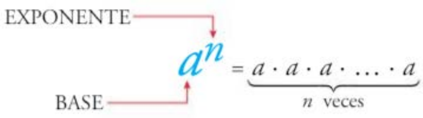
a) Ordénalos de menor a mayor.

b) Expresando los números en forma de fracción, calcula $0{,}6 - 0,\hat{6}: (0,\widehat{60} - 0{,}6\hat{1})$.

TEMA 2. POTENCIAS Y RAÍCES

1. Potencias

Recordemos que una potencia equivale a multiplicar varias veces el mismo número:



Algunos ejemplos son:

$$8^1 = 8 \qquad (-6)^4 = (-6)\cdot(-6)\cdot(-6)\cdot(-6) = 1296 \qquad \left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{2}{7}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{7} = \frac{8}{343}$$

Veamos sus propiedades:

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Por ejemplo,

$$5^2 \cdot 5^3 = 5^{2+3} = 5^5$$

b) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$. Por ejemplo,

$$(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2$$

c) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$. Por ejemplo,

$$(3^2)^4 = 3^{2\cdot 4} = 3^8$$

d) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.Por ejemplo,

$$\frac{3^7}{3^3} = 3^{7-3} = 3^4$$

e) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. Por ejemplo,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3}$$

EJERCICIO;

1. Reduce a una sola potencia:

a) $4^3 \cdot 4^4 \cdot 4$ b) $(5^6)^3$ c) $\frac{7^6}{7^4}$ d) $\frac{15^3}{3^3}$

e) $2^{10} \cdot 5^{10}$ f) $\frac{12^5}{3^5 \cdot 4^5}$ g) $(2^6 \cdot 2^3)^2 : (2^2 \cdot 2^4)^3$ h)$(6^2)^3 \cdot 3^5 \cdot (2^7 : 2^2)$

A veces el exponente de la fracción puede ser negativo o nulo. Debido a esto tenemos que saber dos propiedades más:

f) $a^0 = 1$. Por ejemplo,

$$12^0 = 1$$

g) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Por ejemplo,

$$6^{-3} = \frac{1}{6^3}$$

De esta última propiedad vemos que $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

2. Expresa como fracción simplificada:

a) $\frac{3^4}{3^5}$ b) 5^{-1} c) 4^{-6} d) $x^{-1}y^{-2}$

e) $\frac{x^3y^4}{x^2y^6}$ f) $(3xy^2)^{-2}$ g) $5\cdot 3^{-1}\cdot xy^{-2}$ h) $(a^{-1}b^2)^2\cdot(ab^{-2})^{-1}$

3. Calcula usando las propiedades de las potencias.

a) $2^3\cdot 5^4$ b) $(6^5:2^4):3^5$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^6\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3$ d) $2^8\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^4$

e) $\frac{20^6}{2^6}$ f) $\frac{20^6}{2^5}$ g) $(3^3)^2:3^5$ h) $(2^5)^3\cdot[(5^3)^4:2^3]$

4. Reduce a un único número racional.

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^2$ b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ c) $\left(\frac{-1}{5}\right)^{-2}$ d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$

e) $\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\right)^{-6}$ f) $\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^6$ g) $\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$ h) $\left(\frac{17}{45}\right)^0$

5. Realiza los siguientes productos:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 . \left(\frac{1}{2}\right)^2 . \left(\frac{1}{2}\right)^5$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 . \left(\frac{2}{3}\right)^2 . \left(\frac{2}{3}\right)^5$

c) $(-2)^3 \ . \ (-2)^2 \ . \ (-2)^5$ d) $2^3 \ . \ 3^3 \ . \ 5^3 \ . \ (-1)^3$

e) $\left(\frac{(-2)^2 \ . \ 5^2}{3^3 \ . \ (-5)^3}\right)^2$ f) $\left(\frac{2^3 \ . \ 3^2}{4^3 \ . \ 3^3}\right)^3$ g) $\left(\frac{(-2)^3 \ . \ 3^3}{4^2 \ . \ 3^2}\right)^3$

6. Reduce a una única potencia:

a) $(a^2.a^3.a)^3.(a^2.a^3.a^0)$ b) $2^3 . \ 2 \ . \left(\frac{2^3 \ . \ 2}{2^4 \ . \ 2^2}\right)$ c) $3^2 . \ 3^3 \ . \left(\frac{3^3 \ . \ 3^4}{3^4 \ . \ 3^2}\right)$

7. Escribe con exponente positivo:

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ d) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-5}$ e) 5^{-4} f) $\frac{2^3}{2^6}$

8. Calcula

a) $\dfrac{2^3\left(2^{-2}\right)^4 3^{-2}3^6\left(\frac{1}{2}\right)^5}{2^2\left(3^2\right)^{-4}\left(5^4\right)^0}$ b) $\dfrac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^5 \div \left(\frac{2}{3}\right)\right]\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}$ c) $\dfrac{2^{-1}\cdot 3^4\cdot 2^5\cdot 5^2\cdot 3^{-1}}{3^{-3}\cdot 5^7\cdot 2^3\cdot 5^{-4}\cdot 3^2}$

2. Notación científica

Todos los números pueden ser expresados en notación científica. Un numero puesto en notación científica consta de:

- Una parte entera formada por una sola cifra que no es el cero (la de las unidades).
- El resto de las cifras significativas, si las hay, puestas como parte decimal.
- Una potencia de base 10 que da el orden de magnitud del número.

$$N = \underbrace{a}_{\text{PARTE ENTERA (SOLO UNA CIFRA)}} , \underbrace{b\,c\,d\,\ldots}_{\text{PARTE DECIMAL}} \cdot \underbrace{10^n}_{\text{POTENCIA ENTERA DE BASE 10}}$$

De tal manera que, si n es positivo, entonces N es “grande” y si n es negativo, N es “pequeño”. Para operar números en notación científica, si es un producto o cociente son operaciones inmediatas, mientras que la suma y la resta requieren que ambos números tengan el mismo exponente en la potencia en base 10 de ambos números.

9. Expresa en notación científica los siguientes números:

a) 7 millones
b) $0{,}00001234$
c) 25100000
d) 34,65 billones

10. Expresa con todas las cifras los siguientes números:

a) $3{,}82 \cdot 10^{-6}$
b) $0{,}8 \cdot 10^{-7}$
c) $8{,}042 \cdot 10^{10}$
d) $1{,}083 \cdot 10^{-5}$

11. Opera los siguientes números expresados en notación científica.

a) $(3{,}25 \cdot 10^{7}) \cdot (9{,}35 \cdot 10^{-15})$
b) $(5{,}73 \cdot 10^{4}) + (-3{,}2 \cdot 10^{5})$
c) $(4{,}8 \cdot 10^{12}) : (2{,}5 \cdot 10^{3})$
d) $(1{,}17 \cdot 10^{8}) - (3{,}24 \cdot 10^{-6})$

3. Raíces y radicales

Como ya sabemos, si $a = b^n$ entonces $\sqrt[n]{a} = b$, es decir, b es la **raíz** n-ésima de a. Recordemos que:

- En la expresión $\sqrt[n]{a}$ diferenciamos dos partes: n es el índice y a el radicando.
- Si $\sqrt[n]{a}$ es un número racional, entonces decimos que la raíz es exacta.

Hay raíces que no pueden ser resueltas y tenemos que dejarlas expresadas en forma de raíces, por ejemplo, $\sqrt{12}$. Estas expresiones que no podemos simplificar más las denominamos **radicales**. Veamos sus propiedades:

a) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$. Por ejemplo,

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{3\cdot 2}=\sqrt{6}$$

b) $\sqrt[n]{a^n\cdot b}=a\cdot\sqrt[n]{b}$. Por ejemplo,

$$\sqrt{18}=\sqrt{3^2\cdot 2}=3\sqrt{2}$$

c) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n\cdot m}=a^{\frac{n\cdot m}{n}}=a^m$ o también $\sqrt[n]{a^{n\cdot m}}=a^{\frac{n\cdot m}{n}}=a^m$. Por ejemplo,

$$\left(\sqrt{2}\right)^4=2^2=4$$

d) Dos radicales sólo pueden sumarse y restarse si son idénticos. Por ejemplo

$$\sqrt{2}+4\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

Operaciones con raíces

3.1. Extraer factores

Esta operación nos va a permitir encontrar raíces semejantes, es decir, aquellas que tienen el mismo índice y el mismo radicando. Por ejemplo, $\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, \frac{-1}{2}\sqrt{2}$ todas ellas tienen índice dos y radicando 2. Aparentemente $\sqrt{2}$ y $\sqrt{8}$ no son semejantes, pero, gracias a esta operación veremos que sí.

Pasos para extraer factores:

1. Descompón los números compuestos y ponlos como potencias.
2. SÓLO se pueden extraer aquellos factores que tengan exponente mayor o igual que el índice.
3. Dividimos el exponente entre el índice, el cociente es el exponente que sale fuera y el resto es el exponente que se queda dentro.

Hagamos un ejemplo:

$$\sqrt{1440}$$

Paso 1: descomponemos $1440=2^5\cdot 3^2\cdot 5$

Paso 2: pueden salir el 2 por tener exponente 5(mayor que el índice) y el 3 por tener exponente 2 (igual al índice), pero no puede salir el 5 porque el exponente (1) es menor que el índice (2)

Paso 3: Dividimos exponentes entre el índice

$$\begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

Luego sale 2^2 y se queda dentro 2^1

$$\begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}$$

Sale 3^1 y se queda dentro 3^0

Luego $\sqrt{1440}=\sqrt{2^5\cdot 3^2\cdot 5}=2^2\cdot 3^1\sqrt{2^1\cdot 3^0\cdot 5}=12\sqrt{10}$

$\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2^1\sqrt{2^1}=2\sqrt{2}$ luego $\sqrt{2}$ y $\sqrt{8}$ son semejantes.

12. Extrae factores

$\sqrt[4]{32}$	$\sqrt[3]{135}$	$\sqrt[6]{2a^{13}b^{8}}$	$\sqrt[3]{13824}$
$\sqrt{160}$	$\sqrt[3]{63}$	$\sqrt{a^{9}b^{2}c}$	$\sqrt[4]{8a^{7}b^{3}}$
$\sqrt[3]{81}$	$\sqrt[3]{2592}$	$\sqrt[5]{a^{3}b^{17}c^{9}}$	$\sqrt[5]{a^{87}}$

3.2. Introducir factores

Introducir es lo contrario de extraer. Si para extraer dividimos el exponente por el índice, para introducir, multiplicaremos el exponente por el índice. Así:

$$2^2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^{2\cdot 3}\cdot 3} = \sqrt[3]{2^6\cdot 3}$$

13. Introduce en el radical y simplifica lo posible:

$5\sqrt{6}$	$a^2\sqrt[3]{a}$	$\frac{1}{3}\sqrt{7}$	$\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{-5}{7}}$	$\frac{1}{3}\sqrt{27x-9}$
$3\sqrt{10}$	$xy^2\sqrt{3x}$	$\frac{2}{3}\sqrt{5}$	$a\sqrt{4-a}$	$\frac{1}{n}\sqrt{n^2-n}$
$2\sqrt[3]{5}$	$ab^3\sqrt[4]{a^2c}$	$3\sqrt[4]{\frac{5}{27}}$	$\frac{1}{a}\sqrt{a^2+a}$	$\frac{2}{3x}\sqrt{\frac{x^2+x}{2x+1}}$

3.3. Sumar y restar

Vamos a distinguir dos casos:

- Las raíces son semejantes: en este caso se suma (o resta el número que hay fuera de la raíz. Por ejemplo: $2\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$
- Las raíces no son semejantes: en este caso extraemos factores para intentar estar en el caso anterior. Por ejemplo:

$$\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{32} = \sqrt{2}+\sqrt{2^3}+\sqrt{3^2 2}-\sqrt{2^5} = \sqrt{2}+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2^2\sqrt{2} = \sqrt{2}+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4\sqrt{2} = \boxed{2\sqrt{2}}$$

FACTORIZAMOS RADICANDOS

EXTRAEMOS FACTORES

SUMAMOS RADICALES SEMEJANTES

14. Efectúa las siguientes operaciones:

$3\sqrt{2}+4\sqrt{2}-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-9\sqrt{3}$
$\sqrt{50}+\sqrt{72}-10\sqrt{2}$	$\sqrt{80}+\sqrt{45}-\sqrt{20}$
$-\sqrt{48}+3\sqrt{75}-\sqrt{108}$	$\sqrt{175}+\sqrt{28}-5\sqrt{63}$
$\sqrt{8}-3\sqrt{2}+4\sqrt{18}+\sqrt{50}$	$\frac{6}{5}\sqrt{3}-\frac{3}{10}\sqrt{12}+\frac{7}{20}\sqrt{27}$
$\frac{7}{10}\sqrt{12}+\frac{5}{4}\sqrt{3}-\sqrt{27}$	$\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{8}-\sqrt{2}$
$\frac{2}{5}\sqrt{45}-\frac{4}{15}\sqrt{20}+\sqrt{80}-\frac{4}{5}\sqrt{5}$	$\sqrt{27}-\sqrt{12}-\sqrt{75}+\sqrt{3}$

$\frac{1}{7}\sqrt{18}-3\sqrt{8}-\frac{2}{3}\sqrt{2}+\frac{5}{21}\sqrt{2}$ $\qquad$ $\frac{3}{4}\sqrt{5}-\frac{2}{5}\sqrt{45}-\frac{3}{10}\sqrt{20}$

3.4. Multiplicar y dividir

Para multiplicar o dividir es imprescindible que tengan el **mismo índice**, y en este caso se operan los radicandos.

En el caso de distinto índice, se calcula el mínimo común múltiplo de los índices. Después se divide el mínimo entre los índices y el cociente eleva al radicando. Así:

$$\sqrt{2}\,\sqrt[3]{32}=\sqrt{2}\,\sqrt[3]{2^5}=\sqrt[6]{2^3}\,\sqrt[6]{2^{10}}=\boxed{\sqrt[6]{2^{13}}}$$

15. Calcula:

$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{2}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{3}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{2^2}\cdot\sqrt[4]{2}$

$\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^5}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{8}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{a^3}$

16. Opera:

$\sqrt{24}+3\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{5}$ $\qquad$ $(5+3\sqrt{2})(4-\sqrt{3})$ $\qquad$ $(6\sqrt{3}-5)(4\sqrt{2}-2\sqrt{6})$

$(8+3\sqrt{5})(4-2\sqrt{5})$ $\qquad$ $(4-3\sqrt{2})^2$ $\qquad$ $(4+5\sqrt{3})^2-(1+4\sqrt{3})^2$

$(3+5\sqrt{2})^2$ $\qquad$ $(5\sqrt{2}-\sqrt{3})(1+2\sqrt{6})$ $\qquad$ $(5+3\sqrt{2})^2-(1-7\sqrt{2})(2-5\sqrt{2})$

$(4-3\sqrt{5})^2$ $\qquad$ $(6+5\sqrt{3})^2$ $\qquad$ $(3\sqrt{2}-5)^2+(\sqrt{2}-1)(5\sqrt{2}+3)$

$(5+2\sqrt{3})(5-2\sqrt{3})$ $\qquad$ $(2\sqrt{3}+4\sqrt{5})(7\sqrt{3}-2\sqrt{5})$ $\qquad$ $(3\sqrt{5}+4)^2+(2\sqrt{5}+3)(3-2\sqrt{5})$

4. Números racionales e irracionales

Como ya hemos visto en el tema anterior, los números racionales son aquellos que podemos poner en forma de cociente de dos números enteros. Si ponemos en un esquema todos los tipos de números que vimos el tema anterior:

$$\text{RACIONALES } \mathbb{Q}\begin{cases}\text{ENTEROS } \mathbb{Z}\begin{cases}\text{NATURALES, } \mathbb{N} \to\ 0,1,2,3,4,5,\ \dots\\ \text{NATURALES NEGATIVOS} \to\ -1,-2,-3,-4,-5,\ \dots\end{cases}\\ \text{FRACCIONARIOS}\begin{cases}\text{DECIMALES EXACTOS} \to\ 0,84;17,23;\ \dots\\ \text{DECIMALES PERIÓDICOS} \to\ 2,\widehat{3};0,0\widehat{84};\ \dots\end{cases}\end{cases}$$

A los números que no son racionales los llamamos irracionales. Entro ellos están:

- Raíces no exactas. Por ejemplo:

$$\sqrt{2}=1{,}41421256.. \qquad \sqrt[3]{4}=1{,}58740105..$$

- El numero $\pi=3{,}14159265..$, que es un decimal no exacto ni periódico.

17. Clasifica los siguientes números:

a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt{20}$ c) $\sqrt{\frac{16}{4}}$

d) $-2,\hat{3}$ e) $3,4$ f) 0

TEMA 3. Problemas aritméticos

1. La proporcionalidad en los problemas aritméticos

1.1. La proporcionalidad simple directa

Dos magnitudes son directamente proporcionales si, al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por ese mismo número.
Si A y B son magnitudes directamente proporcionales con los valores:

Magnitud A	a_1	a_2	a_3		a_n
Magnitud B	b_1	b_2	b_3		b_n

Se verifica que el cociente entre dos cantidades correspondientes de ambas magnitudes es constante:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=.....=\frac{a_n}{b_n}=k$$

El número k se denomina constante o razón de proporcionalidad directa.

<u>*Problemas.*</u>

Los resolveremos por el método de <u>**Reducción a la unidad**</u>. que consiste en calcular la cantidad correspondiente a una unidad de la magnitud conocida (constante de proporcionalidad directa) y utilizarla para calcular la desconocida, todo ello aplicando la definición.

Ejemplo: Una máquina produce 84 tornillos en 3 horas. ¿Cuántos tornillos producirá la máquina si trabaja 5 horas?

Hay proporcionalidad directa porque multiplicar por un número la cantidad de horas implica multiplicar por el mismo número los tornillos producidos, así:

HORAS TORNILLOS

3 horas .... **84 tornillos**

Si divido entre 3 la primera magnitud (horas), los tornillos quedan divididos entre 3

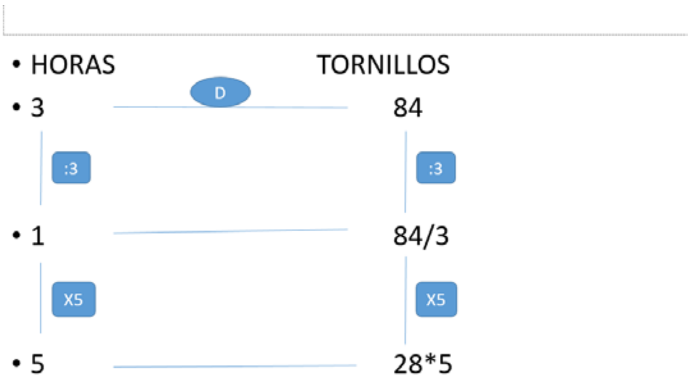
1 hora .... **28 tornillos** (*84:3 es la constante de proporcionalidad*)

Multiplicando por 5 la primera magnitud, la segunda también quedará multiplicada por 5

5 horas .... **140 tornillos**

Por lo tanto, producirá 140 € trabajando 5 horas.

Lo podemos expresar de la siguiente forma:



1.2. *La proporcionalidad simple inversa*

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si, al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda dividida (o multiplicada) por ese mismo número.
Si A y B son magnitudes inversamente proporcionales con los valores:

Magnitud A	a_1	a_2	a_3	…….	a_n
Magnitud B	b_1	b_2	b_3	……	b_n

Se verifica que el producto de dos cantidades correspondientes de ambas magnitudes es constante:

$$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3 = ... = a_n \cdot b_n = k$$

El número k se denomina constante o razón de proporcionalidad inversa.

<u>Problemas</u>

Al igual que en el caso de la proporcionalidad directa, para resolver problemas de proporcionalidad inversa también los realizaremos por el método de **Reducción a la unidad**, que consiste en calcular la cantidad correspondiente a una unidad de la magnitud conocida (constante de proporcionalidad) y utilizarla para calcular la desconocida, todo ello aplicando la definición.

Ejemplo:

Abriendo 6 desagües, una piscina se vacía en 6 horas, ¿cuánto tardará en vaciarse abriendo sólo 4 desagües?

Hay proporcionalidad inversa porque multiplicar por un número el número de desagües implica dividir por el mismo número el tiempo de vaciado:

DESAGÜES TIEMPO DE VACIADO

6 desagües .... **6** horas

Dividiendo entre 6 el número de tapones el tiempo queda multiplicado por 6:

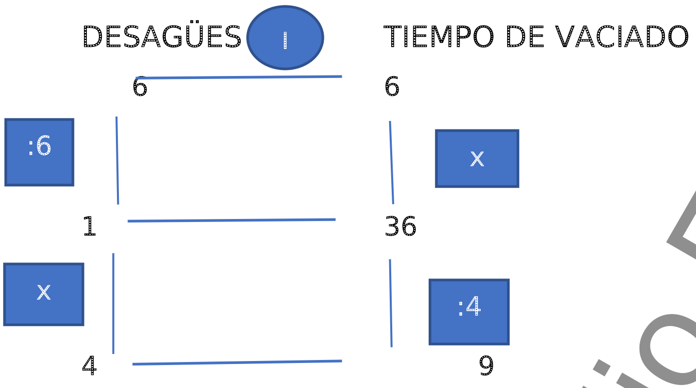
1 desagüe .... **36** horas (6·6 es la constante de proporcionalidad)

Multiplicando por 4 el número de tapones el tiempo queda dividido entre 4:

4 desagües .... **9 horas**

Por lo tanto, con 4 tapones se tardan 75 minutos.

Podemos expresarlo de la siguiente forma:



1.3. La proporcionalidad compuesta

La proporcionalidad compuesta aparece cuando intervienen más de dos magnitudes relacionadas entre sí proporcionalmente.

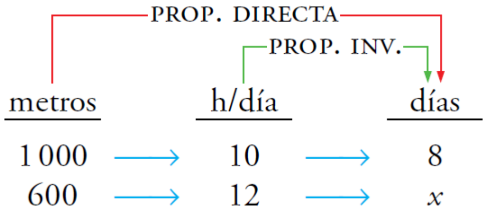
__Problemas__

Para resolver problemas de proporcionalidad compuesta se siguen los siguientes pasos:

- Se identifican las magnitudes que intervienen.
- Se ordenan, con sus datos, colocando en último lugar la que lleva la incógnita.
- Se identifica el tipo de proporcionalidad, directa o inversa, que liga a cada magnitud con la de la incógnita.
- Se reduce a la unidad para saber qué cantidad de la magnitud desconocida corresponde a una unidad de las magnitudes asociadas
- Se calcula el valor pedido con los datos nuevos de las dos primeras magnitudes, respetando el tipo de proporcionalidad existente.

Ejemplo:

Una excavadora, trabajando 10 horas al día, abre una zanja de 1000 metros en 8 días. ¿Cuánto tardaría en abrir una zanja de 600 m, trabajando 12 horas al día?



METROS HORAS/DIA DÍAS

1000 m...trabajando 10 h/día .... tardan 8 días

1000 m...trabajando 1 h/día .... tardan 8·10=80 días

<u>1 m</u> ....trabajando <u>1 h/día</u> .... tardan 80:1000=<u>0’08 días</u>

600 m...trabajando 1 h/día .... tardan 0’08·600=48 días

600 m...trabajando 12 h/día .... tardan 48:12=4 días

Ejercicios:

1.- Indica el tipo de proporcionalidad que presentan los datos de las siguientes tablas. Halla el valor de la constante de proporcionalidad cuando corresponda y completa las tablas.

a)

x	2	4	1	10	20
y	50	25	100		5

b)

x	12	4	6	12	60
y	10	30	5	1	2

c)

x	1	2	4	10	
y		5	10	25	50

2.- Nueve bombillas iguales han consumido 54 kilovatios. Si en las mismas condiciones encendemos 15 bombillas iguales, ¿cuántos kilovatios se consumirán?

3.- Cuatro amigos se reparten el alquiler de un apartamento de verano. Cada uno paga 375 euros. Si se uniesen 2 amigos más, ¿cuánto pagaría cada uno?

4.- Una fotografía de 2,4 MB se ha descargado en nuestro móvil en 5 s. ¿Cuánto tardará en descargarse un vídeo de 1200 MB?

5.- Durante 30 días seis obreros han canalizado 150 metros de tubería para suministro de agua. Calcula cuántos metros canalizarán catorce obreros en 24 días.

6.- Los gastos de alimentación de 135 personas suponen 2250 euros diarios. Calcula cuántas personas podrán alimentarse durante 90 días con 12000 euros.

7.- Una persona lee 2 horas diarias a razón de 5 páginas por hora, y tarda 15 días en leer un libro. Si leyese 3 horas diarias a razón de 8 páginas por hora, ¿Cuántos días tardaría en leer el mismo libro? Expresa el resultado en días y horas.)

8.- Transportar 200 cajas a 450 km de distancia cuesta 300 euros. ¿Cuántas cajas pueden transportarse a 300 km por 350 euros?

2.Repartos proporcionales

2.1. Repartos directamente proporcionales

Para repartir una cantidad N, en partes directamente proporcionales a las cantidades a, b y c, cada parte se obtiene multiplicando la constante de proporcionalidad $\frac{N}{a+b+c}$ por cada número a, b, c.

Ejemplo:

Un agricultor quiere abonar con 300 kg. de abono tres parcelas de forma directamente proporcional a sus superficies, que son 2, 3 y 5 hectáreas, respectivamente. ¿Cuántos kg de abono destinará a cada parcela?

Llamo:

x: kg de abono que corresponde a la parcela de 2 ha.

y: kg de abono que corresponde a la parcela de 3 ha.

Z: kg de abono que corresponde a la parcela de 5 ha.

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}=\frac{300}{2+3+5}=\frac{300}{10}=30$$

$$x = 2\cdot 30 = 60$$

$$y = 3\cdot 30 = 90$$

$$z = 5\cdot 30 = 150$$

El abono dedicado a cada una de las parcelas será 60, 90 y 150 kg.

2.2. Repartos inversamente proporcionales

Repartir una cantidad, N, en partes inversamente proporcionales a las cantidades a, b y c, equivale a repartir N en partes directamente proporcionales a los inversos $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ Por tanto cada parte se obtiene multiplicando las cantidades $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ por la constante de proporcionalidad

$$\frac{N}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

Ejemplo:

Un abuelo premia a sus tres nietos a final de curso con 590 €, en partes inversamente proporcionales al número de suspensos obtenidos, que han sido 2, 5 y 7.

Llamo:

x: euros que corresponden al nieto de 2 suspensos

y: euros que corresponden al nieto de 5 suspensos

Z: euros que corresponden al nieto de 7 suspensos

$$\frac{x}{1/2}=\frac{y}{1/5}=\frac{z}{1/7}=\frac{590}{1/2+1/5+1/7}=\frac{590}{59/70}=700$$

$$x=\frac{1}{2}\cdot 700=350 \qquad y=\frac{1}{5}\cdot 700=140 \qquad z=\frac{1}{7}\cdot 700=100$$

El dinero recibido por cada nieto será 350, 140 y 100 euros respectivamente.

Ejercicios:

9.- Reparte 13500 euros en partes directamente proporcionales a 4, 6 y 8.

10.- Reparte 11050 euros en partes inversamente proporcionales a 2, 3 y 4.

11.- Tres hermanos se reparten una herencia de 15000 € de forma que por cada 2 euros que reciba el pequeño, el mediano recibirá 3 euros y el mayor 5 euros. ¿Qué cantidad se lleva cada uno?

12.- Los tres primeros clasificados de una competición deben repartirse 17930 euros en partes inversamente proporcionales al puesto en el que han quedado. ¿Cuánto percibe cada uno?

13.- Se reparte una cantidad entre tres personas en partes directamente proporcionales a 3, 5 y 7. Si a la segunda persona le corresponden 2200 euros, calcula cuanto le corresponde a cada uno y la cantidad total repartida.

14.- Una empresa reparte una gratificación de 30345 euros entre sus tres empleados de sección, en partes directamente proporcionales a los años de antigüedad en la empresa, que son 8, 12 y 15 años respectivamente. ¿Cuánto recibirá cada uno?

3. Problemas de mezclas y aleaciones

En estos problemas se mezclan dos o más tipos de un producto de diferentes precios. Los datos se suelen expresar en una tabla. Tendremos en cuenta que:

$$\boxed{\text{Precio de la mezcla = Coste total/Peso total}}$$

Ejemplo:

Si mezclamos 18 kg, de alubias de 3,40 €/kg con 12 kg, de alubias de 2,50 €/kg. ¿Cuál será el precio de la mezcla?

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€)	
TIPO 1 DE ALUBIAS	18	3,40	18*3,40 = 61,2 €
TIPO 2 DE ALUBIAS	12	2,50	12*2,50 = 30 €
MEZCLA	30	x	91,2

El precio de la mezcla será 91,2/30 = 3,04 €

Una aleación es una mezcla de metales para conseguir un determinado producto final con mejores propiedades o aspecto.

Las aleaciones se realizan en joyería mezclando metales preciosos, oro, plata platino, rodio, cobre...etc.

La ley de una aleación es la relación entre el peso del metal más valioso y el peso total de la aleación.

Ejemplo:

Un joyero quiere fundir un lingote de 3,5 kg. de oro de ley 0,80 con otro lingote de 1,5 kg, de oro cuya ley es 0,95. ¿Cuál es la ley del lingote resultante?

	PESO TOTAL (kg)	LEY	PESO DE ORO
LINGOTE 1	3,5	0,80	3,5 * 0,80 = 2,80
LINGOTE 2	1,5	0,95	1,5 * 0,92 = 1,38
ALEACIÓN FINAL	5	X	4,18

La Ley de la aleación final será: $x = \dfrac{4{,}18}{5} = 0{,}836 \approx 0{,}84$

Es decir, tendrá un 84% de oro.

En algunos problemas de mezclas o aleaciones, pueden aparecer otros datos desconocidos, pero el planteamiento general siempre es el mismo

Ejemplo:

Un joyero ha fundido un lingote de 2 kg. de oro de ley 0, 85 con otro lingote de oro de 1,5 kg, de ley superior. Sabiendo que la ley de la aleación resultante es de 0,87. ¿cuál es la ley del segundo lingote?

	PESO TOTAL (kg)	LEY	PESO DE ORO
LINGOTE 1	2	0,85	2 * 0,85 = 1,70
LINGOTE 2	1,5	x	1,5 * x
ALEACIÓN FINAL	3,5	0,87	1,70+1,5*x

Planteamos $3{,}5 \cdot 0{,}87 = 1{,}70 + 1{,}5 \cdot x$

$$3{,}045 = 1{,}70 + 1{,}5 \cdot x$$

$$1{,}345 = 1{,}5 \cdot x$$

$$x = 0{,}90$$

La ley del segundo lingote.

Ejercicios:

15.- Juan mezcla 5 kg de chocolate blanco cuyo precio es de 3 euros el kg. Con 7 kg de chocolate negro, de 4 euros el kg. ¿Cuál es el precio de la mezcla resultante?

16.- ¿Cuántos kilos de nueces de Castilla que cuestan a 0,80 € el kilo debe mezclarse con 8 kilos de nueces de la India que cuestan 1,25 € el kilo para crear una mezcla que cueste 1,00 € el kilo?

17.- Se mezclan 36 kg de trigo, de 0,40 €/kg, con 60 kg de cebada, de 0,24 €/kg. ¿A cuánto sale el kilo de mezcla?

18.- Se quiere mezclar vino de 60 € con otro de 35 €, de modo que resulte vino con un precio de 50 € el litro. ¿Cuántos litros de cada clase deben mezclarse para obtener 200 L de dicha mezcla?

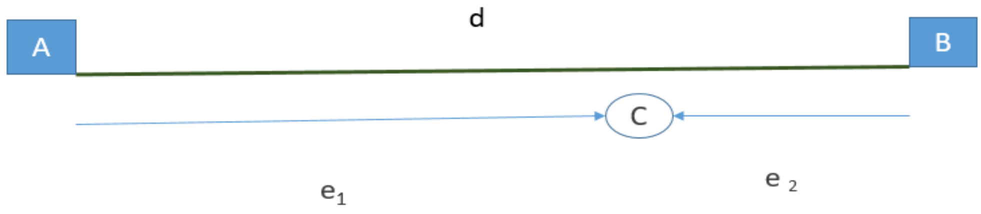
19.- Se ha fundido un lingote de oro de 3 kg de peso y 80% de pureza, junto con otro lingote de 1 kg y 64% de pureza. ¿Cuál es la pureza del lingote resultante?

4.Problemas de móviles

4.1. En la misma dirección y sentidos opuestos. Problemas de encuentros.

Supongamos dos móviles A y B que se mueven sobre la misma recta, situados a una distancia d, y que van al encuentro; el primero con velocidad v_1, y el segundo con velocidad v_2. ¿al cabo de cuánto tiempo y en qué punto se encontrarán?

Llamamos C al punto en que se encuentran. Tendremos el siguiente esquema:



Se verifica que la suma de las distancias e_1 y e_2 que recorren los dos móviles tiene que ser igual a la distancia d que les separa. $e_1+e_2=d$ Teniendo en cuenta que $e = v \cdot t$

Podemos escribir $v_1t + v_2t = d$

Ejemplo:

Dos ciudades A y B distan 500 km. De A sale hacia B un coche a 110 km/h. Simultáneamente sale de B hacia A un camión a 90 km/h. Calcula el tiempo que tardarán en encontrarse y la distancia que recorre cada uno.

Llamamos t al nº de horas que tardan en encontrarse en un punto C.

En ese tiempo: el coche habrá recorrido $110 \cdot t$ km

el camión habrá recorrido $90 \cdot t$ km

Entre los dos habrán recorrido 500 km

Por tanto, planteo ecuación $110t + 90t = 500$

$$200t = 500$$

$$t = 2{,}5$$

Tardarán 2,5 horas en encontrarse.

El coche habrá recorrido $110 \cdot 2{,}5 = 275$ km.

El camión habrá recorrido $90 \cdot 2{,}5 = 225$ km.

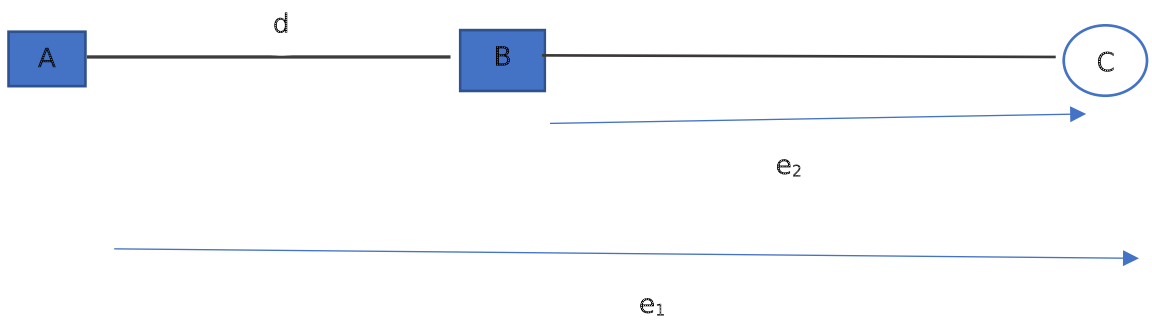
4.2. En la misma dirección y mismo sentido. Problemas de alcance.

Supongamos dos móviles A y B que se mueven sobre la misma recta, el primero con velocidad v_1, y el segundo con velocidad v_2. Si en un instante dado están situados a una distancia d uno de otro, y A va al alcance de B ¿al cabo de cuánto tiempo y en qué punto se encontrarán?

Como A marcha detrás de B, para que pueda alcanzarlo será necesario que $v1>v2$.

Llamamos C al punto en que se encuentran.

Tendremos el siguiente esquema:



Se verifica que la diferencia de las distancias e_1 y e_2 que recorren los dos móviles tiene que ser igual a la distancia d que les separa $e_1 - e_2 = d$ Teniendo en cuenta que $e = v \cdot t$

Podemos escribir $v_1 t - v_2 t = d$

Ejemplo:

Un ciclista profesional avanza por una carretera a una velocidad de 40km/h. Más adelante, a 15 km un cicloturista avanza en el mismo sentido a 16 km/h. ¿cuánto tiempo tarda el ciclista profesional en alcanzar al cicloturista?

Llamamos **t** al número de horas que tardan en encontrarse en un punto C.

En ese tiempo: el ciclista profesional habrá recorrido $40 \cdot t$ km

el cicloturista habrá recorrido $16 \cdot t$ km

La diferencia de esos espacios es igual a la distancia que le separa al inicio.

Por tanto, planteo la ecuación $40t - 16t = 15$

$$24t = 15$$

$$t = 0{,}625$$

Tardarán 0,625 horas = 37'5 minutos en encontrarse

Ejercicios:

20.- Esther viaja de Barcelona a Sevilla en su coche. Sale a las 8 de la mañana y lleva una velocidad constante de 90 km/h. A 110 km de Barcelona, Juan coge, a esa misma hora, un autobús que viaja a 70 km/h, con la misma dirección que Esther, ¿A qué hora se encuentra Esther con el autobús? ¿Qué distancia ha recorrido cada uno?

21.- A las siete de la mañana, Luis sale de Zamora con dirección a Cádiz, distantes entre sí 660 km, a una velocidad de 75 km/h. A la misma hora Noelia sale de Cádiz y se dirige hacia Zamora en la misma carretera que Luis a una velocidad de 60 km/h. ¿A qué hora se cruzarán? ¿Y a qué distancia estarán de Cádiz?

22.- Un camión sale de una ciudad a una velocidad de 80 km/h y dos horas más tarde, sale un coche de la misma ciudad a 120 km/h, ¿A qué distancia de la ciudad alcanzará el coche al camión?

23.- Sonia corre a una velocidad de 8 m/s, y Patricia, a 6 m/s. Si Patricia va delante, a una distancia de 12 m de Sonia, ¿cuánto tiempo tardará Sonia en alcanzar a Patricia?

24.- Un autobús sale de A a 105 km/h. Media hora después sale de B un coche a 120km/h. La distancia entre A y b es de 300 km. Calcula la distancia que recorre cada uno hasta encontrarse.

5. Cálculos con porcentajes

5.1. Cálculo de un tanto por ciento de una cantidad

El tanto por ciento (%) es una razón con denominador 100

Para encontrar el porcentaje de una cantidad sólo hay que multiplicarla por la fracción o por el número decimal asociado a ese porcentaje.

$$r\% de N = \frac{r}{100} \cdot N$$

Ejemplos:

8% de 400 → $\frac{8}{100} \cdot 40 = 3{,}2$

15% de 20 → 0'15 · 20 = 3

5.2. Cálculo del tanto por ciento correspondiente a una proporción

Para calcular qué tanto por ciento representa una cantidad P (parte) respecto a su total T, aplicamos la fórmula anterior

$$\frac{r}{100} \cdot T = P \qquad\qquad r\% = \frac{P \cdot 100}{T}$$

Ejemplo: ¿Qué tanto por ciento representa 90 respecto a 450

$$r\% de 450 = 90 \qquad \frac{r}{100} \cdot 450 = 90 \qquad r = \frac{90 \cdot 100}{450} \qquad r = 20$$

Representa el 20%

5.3. Cálculo de aumentos porcentuales

Aumentar un t% una cantidad equivale a calcular el (100+t) % de esa cantidad.

La cantidad obtenida la podemos obtener mediante la fórmula:

$$C_f = C_i \cdot I_v$$

C_f = Cantidad final

C_i = Cantidad inicial

I_v= Índice de Variación siendo $I_v = 1 + \frac{t}{100}$

5.4. Cálculo de disminuciones porcentuales

Disminuir un t% una cantidad equivale a calcular el (100-t) % de esa cantidad.

La cantidad obtenida la podemos obtener mediante la fórmula:

$$C_f = C_i \cdot I_v$$

C_f = Cantidad final

C_i = Cantidad inicial

I_v= Índice de Variación   siendo $I_v = 1 - \frac{t}{100}$

5.5. Encadenamiento de variaciones porcentuales

Para encadenar aumentos y disminuciones porcentuales, se multiplican los índices de variación parciales para obtener el índice de variación global y se utiliza la misma fórmula que antes

$$C_f = C_i \cdot I_v$$

$$I_v = I_{v_1} \cdot I_{v_2} \cdot \cdots I_{v_n}$$

Ejercicios:

25.- A un trabajador le descuentan mensualmente el 5% para un seguro de su nómina que asciende a 1442 euros. ¿Qué cantidad le descuentan?

26.- Un librero vende 144 libros de los 480 que tenía. ¿Qué porcentaje suponen del total de libros los que ha vendido?

27.- Un programa de televisión fue visto en el mes de septiembre por 540 000 espectadores, lo que supone un 25% más que el mes anterior. ¿Cuántos espectadores vieron el programa en el mes de agosto?

28.- En la factura de un taller aplican un 21% de IVA sobre un importe de 168 euros. ¿Cuánto se paga en total?

29.- En una tienda compramos un televisor con una rebaja del 20% y nos cobran el 21% de IVA. Si pagamos 290,4 euros por él, ¿cuál era su precio inicial?

30.- A un trabajador que cobra 1100 euros mensualmente le suben su salario un 2% y al año siguiente un 2,5%. Calcula el salario mensual después de las 2 subidas.

31.- El litro de gasolina subió al inicio del verano un 5 % llegando a 1,26 € el litro. ¿Cuál era el precio de la gasolina antes de la subida?

32.- Un determinado producto ha aumentado su precio un 15% en un año, y al año siguiente ha aumentado un 16%. ¿Cuál ha sido el porcentaje de aumento en total?

33.- Al ir a pagar una factura en la que hacen un 15% de descuento y aplican un 21 % de IVA, analiza que es mejor: que hagan primero el descuento y luego apliquen el IVA, al revés o da lo mismo.

6. Interés compuesto.

Cuando los intereses que se obtienen al final de cada periodo de inversión no se retiran, como se hace en el interés simple, sino que se añaden al capital y se reinvierten, estamos ante el concepto de **interés compuesto.**

Si invertimos un capital C, a un rédito r% anual, al finalizar el primer año se transforma en:

$C\left(1+\frac{r}{100}\right)$. Si este capital obtenido lo mantenemos en el banco, al finalizar el segundo año recibiremos $C\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$. Es decir, cada año el capital se multiplica por $\left(1+\frac{r}{100}\right)$.

- Si el ***periodo de capitalización es anual*** a interés compuesto será: $C_f = C\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$
- Si el ***periodo de capitalización es mensual*** (se pagan los intereses cada mes), el capital C, habría que multiplicarlo cada mes por $\left(1+\frac{r}{1200}\right)$ y por tanto al cabo de n meses se habría transformado en: $C_f = C\left(1+\frac{r}{1200}\right)^n$ n es el número de meses.
- Si el ***periodo de capitalización es diario***, el capital C, se multiplicaría por $\left(1+\frac{r}{36500}\right)$ y por tanto al cabo de n días, se transformará en: $C_f = C\left(1+\frac{r}{36500}\right)^n$

Ejemplo: Depositamos 12000 € en un banco al 4,5% de interés compuesto anual. Calcula cuál será el capital que obtendremos al cabo de 5 años.

r= 4,5% C= 12000 € n=5 años

$$C_f = C\left(1+\frac{r}{100}\right)^n = 1200\left(1+\frac{4,5}{100}\right)^5 = 14954,18€$$

Ejercicios:

34.- Calcula el interés que producen 2150 euros depositados en un banco que ofrece un 1,8% de interés compuesto anual en los siguientes casos.

a) Después de 3 años.

b) Después de 4 meses.

c) Al cabo de 500 días.

35.- Depositamos en un banco 4000 € al 3,5 % de interés compuesto anual. ¿En cuánto se convertirá en 3 años si los periodos de capitalización son trimestrales?

TEMA 4. El lenguaje algebraico

En el **Álgebra** manejamos relaciones numéricas en las que una o más cantidades son desconocidas, éstas se llaman **variables** o **incógnitas** y se representan por letras. Una **<u>expresión algebraica</u>** es un conjunto de números y letras que se combinan con los signos de las operaciones matemáticas. Al traducir al lenguaje algebraico los términos de un problema, se obtienen **expresiones algebraicas.**

<u>Ejemplos:</u>

Expresión escrita	Expresión algebraica
El doble de la suma de dos números	2 · (a + b)
Un número	x
El consecutivo de un número x	x + 1
La suma de dos números consecutivos	x + (x+1)
El opuesto de un número	–x
El doble del cuadrado de un número	2 · x2
Un número más la mitad de otro	a + b/2
Un número par	2 · x
Un número impar	2 · x + 1
Edad de María actual x, dentro de cinco años:	x + 5
Edad de María actual x, hace dos años:	x – 2
Un número menos su quinta parte	x – x/5
El 35% de un número x	0,35 · x

<u>EJERCICIOS:</u>

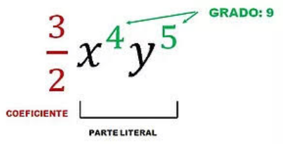
1. Ahora traduce directamente las frases que te indico:

Doble de un número x	
A un número y le añado 15	
A un número z le quito 12	
La tercera parte de un número z	
Al triple de un número m le añado 7	
El doble del resultado de sumar 7 a un número p	
A la tercera parte de un número p le quito 6	
el anterior al número entero x	
el producto de dos números consecutivos	
el cuadrado de un número z	
El cuadrado de la suma de dos números a y b	
La suma de los cuadrados de dos números m y n	

El 112% de un número h	
Al 15% de un número p le quito 7	
La suma de un número y su tercera parte	
El cuadrado de la suma de un número y su siguiente	

Empezamos por las expresiones algebraicas más sencillas: los monomios.

1. Monomios



Un monomio es una expresión algebraica formada por el producto de un número, llamado coeficiente, y una o varias letras elevadas a un número natural, que forman la parte literal del monomio.
El grado de un monomio es el exponente de la letra que forma la parte literal, si solo hay una, o la suma de los exponentes, si hay más de una.

Ejemplo:

MONOMIO	COEFICIENTE	PARTE LITERAL	GRADO
$-2x^8$	-2	x^8	8
$4\ a^4\ b^3$	4	$a^4\ b^3$	7
$6\ x^2\ y\ z$	6	$x^2\ y\ z$	4
$-1/2\ x^2\ y^3$	$-1/2$	$x^2\ y^3$	5
$-3/4\ a^2$	$-3/4$	a^2	2
$6\ a\ b^2$	6	$a\ b^2$	3
$-7\ x\ y\ z$	-7	$x\ y\ z$	3

EJERCICIOS:

2. Completa la siguiente tabla:

MONOMIO	COEFICIENTE	PARTE LITERAL	GRADO
$7x^2$			
	-2	$x\ y^2$	
$5\ a^3\ y^2$			
	-3	$x^2\ y^4$	
$-2a^2\ b\ c$			
	$-1/4$	$a\ b^4$	
$-9\ x\ y$			

TEN EN CUENTA:

El signo del producto de números y letras no se suele escribir:

$$2 \cdot x \cdot y^2 = 2xy^2$$

El exponente 1 no se escribe:

$$x^1 y^1 = x\,y$$

Cuando un monomio está formado solo por letras, su coeficiente es 1:

$$xy^2 = 1\,xy^2$$

1.1. Monomios semejantes

Dos monomios son semejantes si tienen la misma parte literal.

Ejemplos:

Determina si son o no semejantes estos monomios:

- **a)** El monomio: $-5x^2$ y el monomio $-3x^2$ → Son semejantes, porque tienen la misma parte literal: x^2.
- **b)** El monomio: $-2a^2bz$ y el monomio $6\,ab^2z^3$ → No son semejantes, porque no tienen la misma parte literal.
- **c)** El monomio: $2abx^2$ y el monomio $-abx^2$ → Son semejantes, porque tienen la misma parte literal: abx^2.
- **d)** El monomio: $-4x^2$ y el monomio $5x^4$ → No son semejantes, porque no tienen la misma parte literal.

EJERCICIOS:

3. Determina si son o no semejantes estos monomios:

- **a)** El monomio: $9x$ y el monomio $-7x$ →
- **b)** El monomio: xy^3z y el monomio $+2xy^3z$ →
- **c)** El monomio: $-8x^2$ y el monomio $-8x^3$ →
- **d)** El monomio: $3x^6$ y el monomio $5x^2$ →
- **e)** El monomio: $2x^6$ y el monomio $5x^6$ →
- **f)** El monomio: $-4x^6$ y el monomio $-4x^2$ →

4. Escribe, si se puede, un monomio:

- **a)** De coeficiente 2 y parte literal xy^3 →
- **b)** De coeficiente -3 y semejante a $-2x^2$ →
- **c)** De grado **6** y semejante a $-7x^2yz$ →
- **d)** De parte literal x^3y^2 y coeficiente -9 →
- **e)** De parte literal x^2 y coeficiente -1 →
- **f)** De parte literal y^2 y coeficiente -4 →

1.2. Operaciones con monomios

Suma y resta de monomios

La suma o resta de dos o más monomios solo se puede realizar si son semejantes; en caso contrario, la operación se deja indicada.

El resultado de la suma o resta de dos o más monomios semejantes es otro monomio semejante que tiene por coeficiente la suma o resta de los coeficientes.

Ejemplos:

Efectúa las siguientes operaciones:

- **a)** $4x^3 + 12x^3 = 16x^3$
- **b)** $2x^4 + 7x^4 - 3x^4 = 6x^4$
- **c)** $2x^2y - 4x^2y - 6x^2y - x^2y = -9x^2y$
- **d)** $\underline{3x^3} - 2x^2 + 4x^2 + \underline{9x^3} = \underline{11x^3} + 2x^2$
- **e)** $-3x^3 \underline{+2x^6} - x^3 + \underline{5x^6} \underline{-4x^6} + 9x^3 = \underline{3x^6} + 5x^3$

(Cuando sumo o resto monomios semejantes la parte literal no varía).

EJERCICIOS:

5. Ahora tú, efectúa las siguientes operaciones:

- **a)** $6x^2 + 2x^2 - x^2 + 3x^2 - x^2 + 8x^2 - 10x^2 =$
- **b)** $- x^3 + 5x^3 - 2x^3 - x^3 - x^3 - 4x^3 =$
- **c)** $+ 3x^2y - 2x^2y + 5x^2y + x^2y =$
- **d)** $- 4x^4 - 2x^4 + 4x^2 + 2x^2 - 6x^4 + 4x^2 =$
- **e)** $+ 2x^5 - x^6 - 2x^5 + 4x^6 - 8x^6 - 10x^5 =$

Multiplicación y división de monomios:

El **producto** de dos monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes, y por parte literal, el producto de las partes literales de ambos monomios.

El **cociente** de dos monomios tiene por coeficiente el cociente de los coeficientes, y por parte literal, el cociente de las partes literales de ambos monomios. El cociente de dos monomios puede ser otro monomio, un número o una fracción algebraica.

Ejemplos:

Realiza estas operaciones con monomios:

- **a)** $(4x^2)\cdot(2x^3) = (4\cdot 2)\cdot(x^2\cdot x^3) = 8x^{2+3} = 8x^5$
- **b)** $(-2x^2y)\cdot(3x^3y^4) = (-2\cdot 3)\cdot(x^2\cdot x^3\cdot y\cdot y^4) = -6x^{2+3}y^{1+4} = -6x^5y^5$
- **c)** $(-4x^6)\cdot(-5x^3) = ((-4)\cdot(-5))\cdot(x^6\cdot x^3) = -20x^{6+3} = -20x^9$
- **d)** $(12x^5) : (-4x^3) = (12:(-2))\cdot(x^5 : x^3) = -6x^{5-3} = -6x^2$
- **e)** $(8x^7y) : (4x^5y^3) = (8:4)\cdot((x^7:x^5)\cdot(y:y^3)) = 2x^{7-5}y^{1-3} = 2x^2y^{-2} = \frac{2x^2}{y^2}$
- **f)** $(6x^5y) : (4x^5y^2) = (6:4)\cdot((x^5:x^5)\cdot(y:y^2)) = \frac{6}{4}x^{5-5}y^{1-2} = \frac{3}{2}x^0y^{-1} = \frac{3}{2y}$

(Recuerda: $x^0 = 1$*). (Recuerda:* $y^{-1} = \frac{1}{y}$*)*

EJERCICIOS:

6. Ahora tú, efectúa las siguientes operaciones:

a) $(-x^4) \cdot (-3x^2) =$

b) $(-8a^3b) \cdot (-2a^2b^6) =$

c) $(7x^8) \cdot (-2x) =$

d) $(-25x^4) : (5x^3) =$

e) $(9x^2y) : (-3x^2y^3) =$

f) $(2xyz) : (-2xy) =$

2. Polinomios

Un polinomio es una expresión algebraica formada por la suma o la resta de dos o más monomios. Cada uno de los monomios que lo forman se denomina **término**, y el que no tiene parte literal, **término independiente**.

Es posible que en un polinomio haya algunos términos semejantes. En este caso, conviene agrupar los monomios semejantes operando y simplificando la expresión para obtener así el **polinomio reducido**.

Se llama **grado** de un polinomio al mayor de los grados de los monomios que lo componen cuando el polinomio está en su forma reducida.

Es necesario reducir el polinomio antes de decir su grado, ya que es posible que los monomios de mayor grado se simplifiquen y desaparezcan.

<u>Ejemplos:</u>

Indica el grado de cada uno de los siguientes polinomios:

(Obtengo el polinomio reducido agrupando los monomios semejantes y después ordeno los monomios de mayor a menor grado)

a) $4x^2 - 3x^3 + 5x - 2x^4 + 1 + x^2 = -2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 5x + 1$→grado 4

b) $-3 + 7x^3 - 3x^2 + 4x + 2x^3 - 2x^2 + 1 - 9x^3 = -5x^2 + 4x - 2$→grado 2

c)$+7x - 5x^4 + 7x^2 + 8x^3 - 2x^4 + 2 - x^2 = -7x^4 + 8x^3 + 6x^2 + 7x + 2$→grado 4

<u>EJERCICIOS:</u>

7. Indica el grado de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $2x^2 + 6x^3 - 5x^2 + x^3 - 3 - 4x^3 + 1$

b) $2x^2 - 3x - x^2 + 2x - x^2 + x - 3$

c) $x^4 - 4 - 3x^2 + x - x^2 + 1 - 3x^4 - 3x$

2.1. Valor numérico de un polinomio

Es el valor que se obtiene al sustituir las variables por números determinados y efectuar las operaciones.

<u>Ejemplos:</u>

Halla el valor numérico de los polinomios para los valores que se indican.

a) A = $2x^3 - 3x^2 - 2$, para x = 1.

Sustituimos la variable x por 1 y operamos:

$2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 2 = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 2 = 2 - 3 - 2 = -3$

b) $B = 2x^2y - 8xy - 9$, para $x = -1$ e $y = 2$.

$2(-1)^2 \cdot 2 - 8 \cdot (-1) \cdot 2 - 9 = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 8 \cdot 1 \cdot 2 - 9 = 4 + 16 - 9 = 11$.

EJERCICIOS:

8. Calcula el valor numérico en cada caso:

a) $A = 3x^6 + 2x^5 - 3x^4 - x^2 + 7x - 2$, para $x = 0$.

b) $B = -x^4y - x^2y + 7xy - 2$, para $x = -1$, $y = 2$.

2.2 Raíz de un polinomio

Un número es raíz de un polinomio (cero de un polinomio) cuando el valor numérico del polinomio para dicho número es cero.

Ejemplo:

Determina si los números 4 y 5 son raíces de este polinomio:

$P = x^2 - 5x + 4$

Para $x = 4 \rightarrow P = 4^2 - 5 \cdot 4 + 4 = 16 - 20 + 4 = 0 \rightarrow$ 4 es raíz de P.

Para $x = 5 \rightarrow P = 5^2 - 5 \cdot 5 + 4 = 25 - 25 + 4 = 4 \neq 0 \rightarrow$ 5 no es raíz de P.

2.3. Operaciones con polinomios

Suma de polinomios

Para sumar dos polinomios, se suman los monomios semejantes (los del mismo grado) y se dejan igual los demás términos.

Ejemplos:

Sean los polinomios: $A = -3x^3 + 6x^2 + 4x - 2$ $\quad B = x^3 - 3x + 1$. Calcula: A + B.

Podemos sumarlos colocando uno debajo del otro, de manera que coincidan los monomios semejantes

$$\begin{array}{lrrrr} A = & -3x^3 & + 6x^2 & + 4x & - 2 \\ + & & & & \\ \underline{B =} & \underline{x^3} & & \underline{- 3x} & \underline{+ 1} \\ & -2x^3 & + 6x^2 & + x & - 1 \end{array}$$

O también colocándolos en línea, para ello hemos de quitar primero los paréntesis, y como delante de ellos hay un signo + los monomios quedan con los mismos signos después de quitar los paréntesis:

$A + B = (-3x^3 + 6x^2 + 4x - 2) + (x^3 - 3x + 1) = -3x^3 + 6x^2 + 4x - 2 + x^3 - 3x + 1 = -2x^3 + 6x^2 + x - 1$

Opuesto de un polinomio

Es el que se obtiene al cambiar de signo todos sus monomios.

Dado el polinomio $B = x^3 - 3x + 1$, su opuesto $-B = -x^3 + 3x - 1$.

Resta de polinomios

Para restar dos polinomios podemos:

- Restar los monomios semejantes y se dejan igual los demás términos, o
- Sumar al primero el opuesto del segundo.

<u>Ejemplos:</u>

Sean los polinomios: $B = x^3 - 3x + 1$ $C = 2x^2 - 5x - 6$ Calcula: B – C.

$$\begin{array}{rrrrr} B = & x^3 & & -3x & +1 \\ - & & & & \\ C = & & 2x^2 & -5x & -6 \\ \hline & x^3 & -2x^2 & +2x & +7 \end{array}$$

B – C = B + (–C)

$$\begin{array}{rrrrr} B = & x^3 & & -3x & +1 \\ + & & & & \\ -C = & & -2x^2 & +5x & +6 \\ \hline & x^3 & -2x^2 & +2x & +7 \end{array}$$

O también colocándolos en línea, para ello hemos de quitar primero los paréntesis, teniendo en cuenta que, si tengo un signo menos delante del paréntesis, cuando lo quito tengo que cambiar el signo a todos los términos:

$B - C = (x^3 - 3x + 1) - (2x^2 - 5x - 6) = x^3 - 3x + 1 - 2x^2 + 5x + 6 = x^3 - 2x^2 + 2x + 7$

Producto de un número por un polinomio

Para multiplicar un número por un polinomio tenemos que multiplicar ese número por todos los coeficientes de los monomios que forman el polinomio:

<u>Ejemplos:</u>

Sean los polinomios: $A = -3x^3 + 6x^2 + 4x - 2$ $B = x^3 - 3x + 1$. Calcula 2A y 3B.

$2A = 2 \cdot A = 2 \cdot (-3x^3 + 6x^2 + 4x - 2) = -6x^3 + 12x^2 + 8x - 4$

$3B = 3 \cdot B = 3 \cdot (x^3 - 3x + 1) = 3x^3 - 9x + 3$

<u>EJERCICIOS:</u>

9. Sean los polinomios: $A = 4x^3 - 8x^2 + 5x - 4$ $B = -x^3 + 2x - 7$ $C = 3x^2 - 6x + 8$.

Calcula: A + B, B – C, C – B.

10. Sean los polinomios: $A = 2x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ $B = 2x^3 - 4x^2 - 3$ $C = 2x^2 + 4x + 1$.

Calcula: A + B, A + B + C, A – B, B – C, C – B, A + B – C, A – B – C, 2A + 3B, 2A – 4B.

Multiplicación de polinomios

Para multiplicar dos polinomios se multiplica cada monomio de uno de ellos por todos los monomios del otro, y, después se agrupan los monomios semejantes obtenidos. Los podemos colocar uno arriba y otro abajo, o lo podemos hacer colocándolos en línea.

<u>Ejemplos:</u>

Sean los polinomios: $B = x^3 - 3x + 1$ $C = 2x^2 - 5x - 6$ Calcula: B · C.

$$\begin{array}{rrrr} & x^3 & -3x & +1 \\ \cdot & 2x^2 & -5x & -6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} & & -6x^3 & & +18x & -6 \\ & -5x^4 & & +15x^2 & -5x & \\ \underline{2x^5} & & \underline{-6x^3} & \underline{+2x^2} & & \\ 2x^5 & -5x^4 & -12x^3 & +17x^2 & +13x & -6 \end{array}$$

Si hacemos la multiplicación colocándolos en línea, igualmente tenemos que multiplicar cada monomio de uno de ellos por todos los monomios del otro, y, después agrupar los monomios semejantes:

$(x^3 – 3x + 1) \cdot (2x^2 – 5x – 6) = 2x^5 – 5x^4 – 6x^3 – 6x^3 + 15x^2 + 18x + 2x^2 – 5x – 6 = 2x^5 – 5x^4 – 12x^3 + 17x^2 + 13x – 6$

EJERCICIOS:

11. Sean los polinomios: $A = 4x^3 – 8x^2 + 5x – 4$ $B = –x^3 +2x – 7$ $C = 3x^2 – 6x + 8$.

Calcula: $A \cdot B$, $B \cdot C$, $A \cdot C$.

12. Sean los polinomios: $D = 2x^3 – 4x^2 – 3$ $E = 2x^2 + 4x + 1$.

Calcula: $D \cdot E$.

División de polinomios

Dados dos polinomios P y Q, al dividirlos obtenemos otros dos polinomios, C y R, que cumplen:

$P = Q \cdot C + R$

Grado de R < grado de Q

A los polinomios P, Q, C y R se les denomina polinomio dividendo, divisor, cociente y resto de la división, respectivamente.

Método de división "la caja"

Existen dos métodos de hacer esta división. Básicamente es el mismo, pero hay una ligera variación. Utiliza el método que te haya explicado tu profesor.

Primer método

1. En el dividendo se dejan huecos para los términos que faltan.

2. Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor:

$7x^4 : x = 7x^3$. Este es el primer término del cociente.

3. El producto de $7x^3$ por Q, cambiado de signo, se sitúa debajo del dividendo, y se suma.

4. El primer resto es $10x^3 – 94x + 7$. A partir de ahí, volvemos a proceder como en los pasos 2 y 3.

El proceso continúa mientras el resto parcial obtenido sea de grado mayor o igual que el grado de Q.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
7x^4 & -11x^3 & & -94x & +7 & x-3 \\
\cline{6-6}
-7x^4 & +21x^3 & & & & 7x^3+10x^2+30x-4 \\
\cline{1-2}
 & 10x^3 & & & & \\
 & -10x^3 & +30x^2 & & & \\
\cline{2-3}
 & & 30x^2 & & & \\
 & & -30x^2 & +90x & & \\
\cline{3-4}
 & & & -4x & & \\
 & & & +4x & -12 & \\
\cline{4-5}
 & & & & -5 &
\end{array}
$$

$(7x^4) : x = \boxed{7x^3}$

$(10x^3) : x = \boxed{10x^2}$

$(30x^2) : x = \boxed{30x}$

$(-4x) : x = \boxed{-4}$

El cociente es C = $7x^3 + 10x^2 + 30x - 4$. Su grado es la diferencia entre los grados de P y Q. El resto es R = – 5. Su grado es inferior al del divisor.

La relación entre P, Q, C y R es la misma que en la división entera: P = Q · C + R

Cuando **R = 0**, la división es exacta y se cumple que **P = Q · C**. Entonces decimos que **P es divisible por Q.**

<u>Veamos otro ejemplo resuelto:</u>

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & & +8x^2 & +7x & +40 & 2x^2-4x+5 \\
\cline{6-6}
-6x^4 & +12x^3 & -15x^2 & & & 3x^2+6x+17/2 \\
\cline{1-3}
 & 12x^3 & -7x^2 & & & \\
 & -12x^3 & +24x^2 & -30x & & \\
\cline{2-4}
 & & 17x^2 & -23x & & \\
 & & -17x^2 & +34x & -85/2 & \\
\cline{3-5}
 & & & 11x & -5/2 &
\end{array}
$$

$(6x^4) : (2x^2) = \boxed{3x^2}$

$(12x^3) : (2x^2) = \boxed{6x}$

$(17x^2) : (2x^2) = \boxed{17/2}$

El cociente es $C(x) = 3x^2 + 6x + \frac{17}{2}$, y el resto, $R(x) = 11x - \frac{5}{2}$.

<u>Segundo método:</u>

El único paso diferente es el **3**, el resto es igual. Veamos cómo se hace con el último ejemplo:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & & +8x^2 & +7x & +40 & 2x^2-4x+5 \\
\cline{6-6}
-\;6x^4 & -12x^3 & +15x^2 & & & 3x^2+6x+\frac{17}{2} \\
\cline{1-3}
 & 12x^3 & -7x^2 & +7x & & \\
 & -\;12x^3 & -24x^2 & +30x & & \\
\cline{2-4}
 & & 17x^2 & -23x & +40 & \\
 & & -\;17x^2 & -34x & +85/2 & \\
\cline{3-5}
 & & & 11x & -\frac{5}{2} &
\end{array}
$$

<u>EJERCICIOS:</u>

13. Realiza las siguientes divisiones:

a) $(x^5 + 2x^4 - 23x^3 + 11x^2 + 12x - 3) : (3x^3 - 5x^2 + 3) =$

b) $(x^3 - x^2 - x - 2) : (x^2 + x + 1) =$

c) $(6x^3 - 5x^2 + x) : (2x - 1) =$

Regla de Ruffini

En una división de polinomios cuando el divisor es un binomio de la forma **x + a**, o bien **x – a**, la división se puede abreviar utilizando un procedimiento que se llama **Regla de Ruffini.**

<u>Pasos a seguir:</u>

a) Escribimos los coeficientes de los términos del polinomio que se va a dividir, ordenado de mayor a menor grado, añadiendo un cero en los términos que falten.

b) A la izquierda colocamos el término independiente del divisor cambiado de signo y bajamos el primer coeficiente del dividendo.

c) Multiplicamos el primer coeficiente del dividendo por el término independiente del divisor cambiado de signo, y se lo sumamos al siguiente coeficiente del dividendo.

d) Repetimos el proceso hasta llegar al último coeficiente.

e) El último número que aparece en la última fila es el resto de la división. Los números anteriores se corresponden con los coeficientes del cociente, ordenados de mayor a menor grado. El grado del cociente siempre es una unidad menor que el grado del dividendo.

<u>Ejemplos:</u>

Realiza la siguiente división de polinomios mediante la regla de Ruffini:

$(3x^3 + 4x - 2) : (x - 2)$

$3x^3 + 4x - 2 \rightarrow$ Coeficientes: 3, 0, 4, – 2

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & \downarrow & & & \\ \hline & 3 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & \downarrow & \cdot 2 \to 6 & & \\ \hline & 3 & 6 & & \end{array}$$

	3	0	4	– 2
2		6	12	32
	3	6	16	30

	3	0	4	– 2	
2		6	12	32	
	3	6	16	$\boxed{30}$	**Resto**
	Cociente				

Como el dividendo es de grado 3, el cociente es de grado 2.

C = $3x^2 + 6x + 16$

R = 30

<u>EJERCICIOS:</u>

14. Realiza las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini:

a) $(5x^4 + 3x – 5) : (x + 1) =$

b) $(– 3x^3 + 2x^2 + x + 4) : (x – 5) =$

c) $(2x^5 – x^3 + 1) : (x – 1) =$

d) $(2x^3 –4x^2 – 6x + 8) : (x + 1) =$

Sacar factor común en un polinomio

<u>Pasos que seguir:</u>

1. Comprobamos si hay letras que se repiten en todos los términos del polinomio. Si las hay tomamos las que se repiten con menor exponente.

2. Hallamos el mcd de los coeficientes de los términos.

3. El factor común del polinomio son las letras y los números obtenidos.

4. Dividimos cada término del polinomio entre el factor común y expresamos el polinomio como un producto del factor común por el polinomio resultante de la división.

<u>Ejemplos:</u>

Saca factor común en estos polinomios:

a) $6x^4 – 24x^3 + 12x^2 = \overrightarrow{(:6x^2)} = 6x^2 \cdot (x^2 – 4x + 2)$

b) $–4x^5 + 3x^2 – x = \overrightarrow{(:x)} = x \cdot (–4x^4 + 3x – 1)$

c) $6x^2y^2 – 3xy^2 + 30x^2y = \overrightarrow{(:3xy)} = 3xy \cdot (2xy – y + 10x)$

Comprueba que, si quitaras el paréntesis en la expresión final y haces la multiplicación indicada, volverías a obtener la expresión inicial.

<u>EJERCICIOS:</u>

15. Extrae factor común en las siguientes expresiones:

a) $2x^2 - 6x + 4x^3 =$

b) $3x^3 - 6x^4 + 9x^2 =$

c) $xy - 5xyz^2 + 2xz =$

d) $5x^2y - 10x + 15xz =$

e) $4b^2c + 8bc - 32a^2b =$

f) $9abc + 6ab - 12b^2c =$

2.4. Igualdades notables

Cuadrado de una suma

Es igual al cuadrado del primero más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$$

Es el cuadrado de la suma de dos monomios:

$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$

Cuadrado de una diferencia

Es igual al cuadrado del primero menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

$$(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 - 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$$

Es el cuadrado de la diferencia de dos monomios:

$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b = a^2 - 2ab + b^2$

Suma por diferencia

Es igual a la diferencia de sus cuadrados.

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$$

Es la suma por la diferencia de dos monomios:

$(a + b) \cdot (a - b) = a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b = a^2 - b^2$

<u>**Ejemplos:**</u>

Realiza estos productos notables:

a) $(3x - 2y)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2$

b) $(4 + 2y)^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2y + (2y)^2 = 16 - 16y + 4y^2$

c) $(8 - x) \cdot (8 + x) = 8^2 - x^2 = 64 - x^2$

Encuentra el producto notable, es decir, expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia, o bien como producto de una suma por una diferencia:

a) $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$

b) $a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2$

c) $81 - 4x^2 = (9 + 2x) \cdot (9 - 2x)$

<u>**EJERCICIOS:**</u>

16. Calcula los siguientes productos notables:

a) $(4x - 3y)^2$

b) $(6x + y)^2$

c) (2x – 5y) · (2x + 5y)

Encuentra el producto notable:

a) $9x^2 + 24xy + 16y^2$

b) $4b^2 - 20b + 25$

c) $9y^2 - 4x^2$

3. Fracciones algebraicas

Una fracción algebraica es una fracción que tiene por denominador un polinomio.

3.1. Simplificación de fracciones algebraicas

Para simplificar una fracción algebraica, buscamos otra fracción equivalente sin factores comunes en el numerador y en el denominador. Para buscar esa fracción primero expresamos el numerador y el denominador como factores, utilizando si es posible, la extracción de factor común y las igualdades notables, y después eliminamos los factores comunes.

Ejemplos: Simplifica:

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{(x+1)\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$$

3.2. Operaciones con fracciones algebraicas:

Para **sumar** o **restar** fracciones algebraicas, se reducen a común denominador y se suman o restan los numeradores.

Ejemplo:

$$\frac{4x}{x+1} + \frac{x-1}{x+2} = \frac{4x\cdot(x+2)}{(x+1)\cdot(x+2)} + \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x+2)} = \frac{4x^2+8x+x^2-1}{(x+1)\cdot(x+2)} = \frac{5x^2+8x-1}{x^2+3x+2}$$

El **producto** de fracciones algebraicas es otra fracción algebraica que tiene por numerador el producto de los numeradores, y por denominador el producto de los denominadores.

Ejemplo:

$$\frac{2x}{x+1}\cdot\frac{3x-2}{x+1} = \frac{(2x)\cdot(3x-2)}{(x+1)\cdot(x+1)} = \frac{6x^2-4x}{x^2+2x+1}$$

Para **dividir** dos fracciones algebraicas, se multiplica el numerador de la primera por el denominador de la segunda obteniendo el numerador de la fracción algebraica resultante y para obtener el denominador multiplicamos el denominador de la primera por el numerador de la segunda.

Ejemplos: Opera y simplifica:

a) $\frac{3x-1}{x^2+2x} : \frac{2x}{x+1} = \frac{(3x-1)\cdot(x+1)}{(x^2+2x)\cdot(2x)} = \frac{3x^2+3x-x-1}{2x^3+4x^2} = \frac{3x^2+2x-1}{2x^3+4x^2}$

b) $\frac{6x^2}{4x^2-9} : \left(\frac{5x}{2x-3} + \frac{5x}{2x+3}\right) = \frac{6x^2}{4x^2-9} : \left(\frac{5x\cdot(2x+3)+5x\cdot(2x-3)}{(2x-3)\cdot(2x+3)}\right) =$

$$= \frac{6x^2}{(2x+3)\cdot(2x-3)} : \left(\frac{10x^2+15x+10x^2-15x}{(2x-3)\cdot(2x+3)}\right) = \frac{6x^2}{(2x+3)\cdot(2x-3)} : \left(\frac{20x^2}{(2x-3)\cdot(2x+3)}\right) =$$

$$= \frac{6x^2\cdot(2x-3)\cdot(2x+3)}{(2x+3)\cdot(2x-3)\cdot 20x^2} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

EJERCICIOS:

17. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas. Para ello transforma en producto el numerador y el denominador utilizando la extracción de factor común o las igualdades notables:

a) $\frac{2x+4}{3x^2+6x}$

b) $\frac{x+1}{x^2-1}$

c) $\frac{x-2}{x^2-4x+4}$

d) $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$

18. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica. Ten en cuenta las igualdades notables:

a) $\left(x-\frac{4}{x}\right):\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\right)$

b) $\left(\frac{2}{x}:\frac{1}{3+x}\right)\cdot\frac{x^2}{2}$

c) $\left(1-\frac{2}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right):\frac{x^2-4}{2x}$

d) $\left(x-\frac{9}{x}\right)\cdot\frac{2}{x+3}$

TEMA 5. ECUACIONES

Una **ecuación** es una igualdad algebraica formada por dos expresiones algebraicas separadas por el signo igual, en la que interviene una letra llamada incógnita.
Los principales elementos de una ecuación son:

- **Miembros:** son cada una de las dos expresiones algebraicas separadas por el signo igual; la expresión situada a la izquierda se denomina **primer miembro**, y la situada a la derecha, **segundo miembro**.
- **Términos:** son los sumandos de los miembros.
- **Incógnitas:** son las letras cuyos valores son desconocidos.

Solución de una ecuación son los valores de la incógnita que hacen cierta la igualdad. **Resolver una ecuación** es encontrar su **solución** o sus soluciones.
Dos **ecuaciones** son **equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones.

1. Ecuaciones de primer grado

Una **ecuación de primer grado es** una igualdad algebraica que se puede expresar de la forma $\boldsymbol{ax+b=0}$, con a y b números reales y $\boldsymbol{a \neq 0}$. Esta ecuación tiene solución única: $\boldsymbol{x=-\frac{b}{a}}$

Transposición de términos:

- **Regla de la suma.** Si a los dos miembros de una ecuación les sumamos o restamos un mismo número, o una expresión algebraica, se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.
- **Regla del producto.** Si multiplicamos o dividimos los dos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero, se obtiene otra ecuación equivalente.

Estas reglas sirven para despejar la x mediante una serie de pasos. Cada paso consiste en transformar la ecuación en otra equivalente, en la que la x esté más próxima a ser despejada.
En la práctica se resumen como:
- Si un término está sumando en un miembro, pasa restando al otro; y si está restando, pasa sumando.
- Si un término está multiplicando en un miembro, pasa dividiendo al otro; y si está dividiendo, pasa multiplicando.

Pasos para la resolución de ecuaciones de primer grado:

1º. Quitamos los paréntesis, si los hay, aplicando la propiedad distributiva.
2º. Eliminamos los denominadores, si los hay. Para ello, se multiplican los dos miembros de la ecuación por un múltiplo común de los denominadores, preferiblemente, su mínimo común múltiplo.
3º. Agrupamos los términos con x en uno de los miembros, y los números, en el otro: utilizamos la transposición de términos.
4º. Reducimos los términos semejantes.
5º. Despejamos la incógnita.
6º. Comprobamos la solución: sustituimos la x por la solución en ambos miembros y operamos. El resultado debe ser idéntico.

Dependiendo del número de soluciones podemos tener ecuaciones:

- <u>Con una única solución:</u>

Ejemplo: $2 \cdot x = 8 \rightarrow x = \frac{8}{2} = 4$

- <u>Sin solución:</u>

Ejemplo: $0 \cdot x = 8 \rightarrow Ningún\ número\ multiplicado\ por\ 0\ da\ 8.$

- <u>Con infinitas soluciones:</u>

Ejemplo: $0 \cdot x = 0 \rightarrow Cualquier\ número\ multiplicado\ por\ 0\ da\ 0.$

$Es\ cierto\ para\ cualquier\ valor\ de\ la\ x$**.**

<u>EJEMPLOS RESUELTOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO:</u>

a) $2 \cdot (3x - 1) - 5x = 5 - (3x + 11)$

Quitamos los paréntesis, en el primer paréntesis aplicando la propiedad distributiva y en el segundo teniendo en cuenta que el signo menos cambia el signo a todos los términos de su interior:

$6x - 2 - 5x = 5 - 3x - 11$

Agrupamos los términos con x en el primer miembro y los números en el segundo. Lo que está sumando pasa restando y lo que está restando pasa sumando:

$6x - 5x + 3x = 5 - 11 + 2$

Reducimos los términos semejantes:

$4x = -4 \rightarrow x = \dfrac{-4}{4} = -1 \rightarrow \boxed{x = -1}$

b) $\frac{x}{2} - 3 \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right) = \frac{x}{8} - 2$

Quitamos el paréntesis, −3 multiplica a los dos términos que están en el interior del paréntesis:

$\dfrac{x}{2} - 3 + \dfrac{3x}{4} = \dfrac{x}{8} - 2$

Quitamos los denominadores. El mcm es 8, colocamos el 8 como denominador de todos los términos, dividimos 8 entre cada denominador, (si no hay es un 1), y el resultado lo multiplicamos por los numeradores:

$\dfrac{4x}{8} - \dfrac{24}{8} + \dfrac{6x}{8} = \dfrac{x}{8} - \dfrac{16}{8} \rightarrow 4x - 24 + 6x = x - 16$

Agrupamos los términos con x en el primer miembro y los números en el segundo. Lo que está sumando pasa restando y lo que está restando pasa sumando:

$4x + 6x - x = 24 - 16$

$9x = 8 \rightarrow \boxed{x = \dfrac{8}{9}}$

c) $\dfrac{5x-3}{4} - \dfrac{4 \cdot (x-2)}{6} - \dfrac{2x+3}{9} = 5$

Quitamos el paréntesis, (multiplicamos 4 por **x** y por **– 2**):

$\dfrac{5x - 3}{4} - \dfrac{4x - 8}{6} - \dfrac{2x + 3}{9} = 5$

Ponemos todos los denominadores con el mcm que es 36, dividimos 36 entre cada denominador, (si no hay es un 1), y el resultado lo multiplicamos por los numeradores:

$$\frac{45x-27}{36}-\frac{24x-48}{36}-\frac{8x+12}{36}=\frac{180}{36}$$

Como los denominadores coinciden y ambas expresiones son iguales los numeradores han de coincidir, con lo que podemos prescindir de los denominadores. Hemos de tener en cuenta que el signo menos delante de la fracción afecta a todo el numerador, con lo que hemos de cambiar el signo a todos los términos que tienen delante de la fracción un signo menos. Por lo tanto:

$$45x-27-24x+48-8x-12=180$$

Agrupamos los términos:

$$45x-24x-8x=180+27-48+12$$

$$13x=171 \rightarrow \boxed{x=\frac{171}{13}}$$

<u>EJERCICIOS:</u>

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $\frac{x+3}{5}-\frac{x-6}{7}=1$

b) $\frac{1-(5x+4)}{4}-\frac{3+5\cdot(x-2)}{18}-\frac{2-4x}{9}=\frac{3}{4}$

c) $\frac{x+3}{4}-\frac{2\cdot(1-x)}{8}=\frac{x+1}{6}$

d) $-\frac{x}{2}+\frac{3x-2}{5}-2\cdot(5x-4)-\frac{x+2}{4}=\frac{x+3}{2}-\frac{7}{6}-\frac{x}{2}$

e) $\frac{2\cdot(x-3)}{7}-\frac{5\cdot(2x-1)}{14}=\frac{3}{4}$

f) $\frac{3x}{2}-2\cdot(x-3)-\frac{x-3}{4}=5+x$

g) $\frac{3\cdot(x+1)}{4}-\frac{x+3}{6}+x=2x+\frac{3-7x}{12}$

2. Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado con una incógnita es una igualdad algebraica que se puede expresar de la forma $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$, siendo a, b y c números reales y $a \neq 0$.

Si b y c son números distintos de cero, se dice que la ecuación es **completa:**

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$$

Si b o c es igual a cero, la ecuación es **incompleta:**

$$\boldsymbol{ax^2+bx=0}$$

$$\boldsymbol{ax^2+c=0}$$

2.1 Resolución de ecuaciones de segundo grado completas

Para obtener las soluciones de una ecuación de segundo grado completa utilizamos la fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

El doble signo $\pm$ indica que pueden existir dos soluciones:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Cuando una ecuación tiene dos soluciones, las designamos como x_1 y x_2 para distinguirlas.

<u>Número de soluciones de una ecuación de segundo grado:</u>

En la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado completas, aparece la expresión $\sqrt{b^2-4ac}$. Esta raíz cuadrada solo existirá cuando el radicando sea positivo o cero. Al número b^2-4ac se le denomina **discriminante** y se representa por Δ. El número de soluciones de la ecuación depende del signo de Δ:

- $\Delta = b^2-4ac > 0$. La ecuación tiene **dos soluciones distintas.**
- $\Delta = b^2-4ac = 0$. La ecuación tiene **una solución**, y se dice que es una solución doble.
- $\Delta = b^2-4ac < 0$. No existe la raíz cuadrada, y por tanto, la ecuación **no tiene solución.**

<u>Ejemplos:</u>

a) Resuelve la ecuación $x^2-5x+6=0$.

$a=1$

$b=-5$

$c=6$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1}=\frac{+5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{+5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{+5\pm 1}{2}$$

$$x_1=\frac{+5+1}{2}=\frac{6}{2}=3\rightarrow\boxed{x_1=+3}$$

$$x_2=\frac{+5-1}{2}=\frac{4}{2}=2\rightarrow\boxed{x_2=+2}$$

b) Resuelve la ecuación $2x^2+4x+2=0$.

$a=2$

$b=4$

$c=2$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{(4)^2-4\cdot 2\cdot 2}}{2\cdot 2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-16}}{4}=\frac{-4\pm\sqrt{0}}{4}=\frac{-4+0}{4}=\frac{-4}{4}=-1$$

$\boxed{x=-1}$

c) Resuelve la ecuación $2x^2+5x+6=0$.

$a=2$

$b=5$

$c=6$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{(5)^2-4\cdot 2\cdot 6}}{2\cdot 2}=\frac{-4\pm\sqrt{25-48}}{4}=\frac{-4\pm\sqrt{-23}}{4}\rightarrow\boxed{No\ tiene\ solución.}$$

<u>EJERCICIOS:</u>

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2-7x+12=0$

b) $x^2-9x+18=0$

c) $2x^2-8x+8=0$

d) $x^2-6x+8=0$

e) $3x^2+12x+9=0$

f) $x^2-9x+14=0$

2.2. Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas

<u>**Caso 1.**</u> Si c = 0. Ecuaciones del tipo $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$. En este caso no es necesario aplicar la fórmula general, pues se puede sacar la x como factor común e igualar a cero cada uno de los dos factores, ya que para que un producto de factores valga cero, uno de los dos factores ha de ser cero.

<u>Ejemplo:</u>

Resuelve la ecuación $3x^2 - 2x = 0$. Sacamos factor común a la x:

$$x \cdot (3x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} \boxed{x_1 = 0} \\ 3x - 2 = 0 \rightarrow \boxed{x_2 = \frac{2}{3}} \end{cases}$$

<u>**Caso 2.**</u> Si b = 0. Ecuaciones del tipo $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$. En este caso no es necesario aplicar la fórmula general, pues podemos despejar la x^2 y luego la x:

<u>Ejemplo:</u>

Resuelve la ecuación $3x^2 - 27 = 0$.

$$3x^2 - 27 = 0 \rightarrow 3x^2 = 27 \rightarrow x^2 = \frac{27}{3} = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \rightarrow \begin{cases} \boxed{x_1 = +3} \\ \boxed{x_2 = -3} \end{cases}$$

<u>EJERCICIOS:</u>

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 + 7x = 0$

b) $-4x^2 + 5x = 0$

c) $x^2 - 9 = 0$

d) $2x^2 - 32 = 0$

e) $-8x^2 - 24x = 0$

2.3. ¿Cómo se resuelven ecuaciones de segundo grado con paréntesis y/o denominadores?

1º. Se eliminan los paréntesis.

2º. Se eliminan los denominadores.

3º. Se agrupan todos los términos en el primer miembro.

4º. Se reducen los términos, es decir, se operan los que son semejantes.

5º. Se simplifica la ecuación, si se puede, y se resuelve.

6º. Se comprueban las soluciones.

<u>Ejemplo:</u>

Resuelve la ecuación: $\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{3-4x}{4} = \frac{5+4x}{4}$

Eliminamos el paréntesis, aplicando el producto notable: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{2} - \frac{3 - 4x}{4} = \frac{5 + 4x}{4}$$

Colocamos como denominador el mcm de los denominadores, dividimos ese mcm entre los denominadores y el resultado lo multiplicamos por los numeradores:

$$\frac{2\cdot(x^2-2x+1)}{4}-\frac{3-4x}{4}=\frac{5+4x}{4}$$

Volvemos a quitar el paréntesis haciendo la correspondiente multiplicación:

$$\frac{2x^2-4x+2}{4}-\frac{3-4x}{4}=\frac{5+4x}{4}$$

Quitamos los denominadores, teniendo en cuenta que el signo menos delante de la fracción cambia el signo a todos los términos del numerador:

$$2x^2-4x+2-3+4x=5+4x$$

Agrupamos todos los términos en el primer miembro y operamos los semejantes:

$$2x^2-4x+2-3+4x-5-4x=0$$

$$2x^2-4x-6=0$$

Simplificamos dividiendo ambos miembros entre 2: $x^2-2x-3=0$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1}=\frac{+2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm4}{2}$$

$$x_1=\frac{2+4}{2}=\frac{6}{2}=3\rightarrow\boxed{x_1=3}$$

$$x_2=\frac{2-4}{2}=\frac{-2}{2}=-1\rightarrow\boxed{x_2=-1}$$

Por último, comprobamos las soluciones sustituyendo estos valores obtenidos en la ecuación.

Comprobamos que $x_1=3$ es solución:

$$\frac{(3-1)^2}{2}-\frac{3-4\cdot3}{4}=\frac{5+4\cdot3}{4}$$

$$\frac{2^2}{2}-\frac{3-12}{4}=\frac{5+12}{4}$$

$$\frac{4}{2}-\frac{-9}{4}=\frac{17}{4}$$

$$\frac{4}{2}+\frac{9}{4}=\frac{17}{4}$$

$$\frac{17}{4}=\frac{17}{4}\rightarrow x=3\ es\ solución.$$

Comprobamos que $x_1=-1$ es solución:

$$\frac{(-1-1)^2}{2}-\frac{3-4\cdot(-1)}{4}=\frac{5+4\cdot(-1)}{4}$$

$$\frac{(-2)^2}{2}-\frac{3+4}{4}=\frac{5-4}{4}$$

$$\frac{4}{2}-\frac{7}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{8}{4}-\frac{7}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\rightarrow x=-1\ es\ solución.$$

<u>EJERCICIOS:</u>

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{(x-2)^2}{3}+\frac{14x-5}{6}=\frac{11}{6}$

b) $\frac{(x-2)(x+2)}{5}+\frac{14x+35}{6}=\frac{52x+5}{10}$

c) $(2x+1)^2=-1$

d) $(x-2)+(2x-1)(x-3)=x\cdot(3x-3)-2x$

e) $(x-1)(x+2)=2+(x+3)(x-4)$

f) $\frac{3}{4}x^2+\frac{4}{5}x=0$

3. Resolución de problemas mediante ecuaciones

Resolver un problema mediante una ecuación es traducirlo al lenguaje algebraico y encontrar su solución. En general, hay que seguir estos pasos:

1º. Identificamos los datos conocidos y lo que deseamos conocer: la incógnita.

2º. Planteamos la ecuación, relacionando lo conocido con lo desconocido.

3º. Resolvemos la ecuación.

4º. Comprobamos que la solución obtenida es válida, e interpretamos la solución en el contexto del problema.

<u>Ejemplo:</u>

Tenemos 24 flores y vamos a hacer dos ramilletes. Queremos que uno tenga el triple de flores que el otro. ¿Cuántas flores tendrá cada ramillete?

Identificamos la incógnita. Para ello hay que distinguir entre los datos que conocemos y los que no.

Lo que sabemos	Lo que no sabemos
24 flores en dos ramilletes Un ramillete con el triple de flores que el otro	Flores del ramillete menor Flores del ramillete mayor

Incógnita: x = número de flores del ramillete menor

- Planteamos la ecuación:

El ramillete mayor tiene el triple de flores que el menor: 3x

Entre los dos tienen 24 flores: x + 3x =24

- Resolvemos la ecuación:

x + 3x =24

4x = 24

$x=\frac{24}{4}=6$

- Comprobamos la solución:

6 + 3·6 =24 → 24 = 24

Luego la solución x = 6 es válida.

- Interpretamos:

El ramillete menor tendrá 6 flores, y el mayor, 3 · 6 = 18.

<u>Ejemplo:</u>

Una parcela de forma rectangular tiene una superficie de 1800 m^2. Si mide el doble de largo que de ancho, ¿cuáles son las dimensiones de la parcela?

- Identificamos la incógnita x: medida del ancho.

Lo que sabemos	Lo que no sabemos
La superficie mide 1800 m^2 El largo es el doble que el ancho	Ancho Largo

- Planteamos la ecuación:

Ancho de la parcela: x

El largo es el doble que el ancho: 2x

La superficie es 1800 m^2

Ancho · Largo = 1800

x · 2x = 1800

- Resolvemos la ecuación:

$2x^2 = 1800 \rightarrow x^2 = \frac{1800}{2} = 900 \rightarrow x = \pm\sqrt{900} = \pm 30$

- Comprobamos:

$2\cdot(30)^2 = 1800 \rightarrow 1800 = 1800 \rightarrow x = 30$ es una solución válida de la ecuación

$2\cdot(-30)^2 = 1800 \rightarrow 1800 = 1800 \rightarrow x = -30$ es una solución válida de la ecuación.

- Interpretamos:

La solución – 30 no es válida en este problema, porque no existen longitudes negativas. Por tanto, el ancho de la parcela medirá 30 m, y el largo, 2 · 30 = 60 m.

<u>EJERCICIOS:</u>

5. La suma de dos números es 48. Si uno es la mitad del otro, ¿qué números son?

6. María tiene 4 tebeos menos que Sara. Si María le da 2 de sus tebeos, Sara tendrá el triple de ella. ¿Cuántos tebeos tiene cada una?

7. La suma de dos números consecutivos impares es 156. ¿De qué número se trata?

8. El producto de las edades de Luisa y su hermano, que tiene 5 años menos que ella, es 176. ¿Cuántos años tienen ambos?

9. Para vallar una finca rectangular de 750 m^2 se utilizan 110 m de cerca. Calcula las dimensiones de la cerca.

10. Un rectángulo tiene una superficie de 725 m^2. Calcula sus dimensiones sabiendo que mide 4 m más de largo que de ancho.

11. El perro de Álex tiene 12 años menos que él. Dentro de 4 años, Álex tendrá el triple de la edad de su perro. ¿Cuáles son sus edades?

12. Lucía tiene tres hijos. El pequeño tiene la mitad de años que el mediano, y este tiene 6 años menos que el mayor. Calcula las edades de los tres, sabiendo que la suma de sus edades actuales es igual a la edad de su prima Ana, que es 12 años mayor que el hermano pequeño.

13. Disponemos de dos tipos de té: uno de Tailandia, a 5,20 €/kg, y otro de la India, a 6,20 €/kg, y queremos obtener 100 kg de té a 6 €/kg. ¿Cuántos kilos hemos de mezclar de cada tipo?

14. El lado de un cuadrado mide 3 m más que el lado de otro cuadrado. Si la suma de las dos áreas es 89 m^2, calcula las dimensiones de los cuadrados.

15. Una madre tiene 26 años más que su hijo, y dentro de 10 años la edad de la madre será el doble de la del hijo. ¿Cuántos años tienen en la actualidad?

16. La edad de Rubén es la quinta parte de la edad de su padre. Dentro de 3 años, la edad de Rubén será la cuarta parte de la edad de su padre. ¿Qué edad tiene cada uno actualmente?

17. Se mezclan 1.800kg de harina de 0,42€/kg con 3.500kg de harina de 0,54€/kg. ¿Qué precio tiene el kilo de la mezcla?

18. El producto de dos números enteros consecutivos es igual al cuádruple del menor menos 2 unidades. Encuentra dichos números.

19. Calcula dos números enteros tales que su diferencia sea 2 y la suma de sus cuadrados sea 884.

20. Ruth tiene 17 años y su madre tiene 47. ¿Cuánto ha de transcurrir para que la edad de la hija sea la mitad de la de la madre?

TEMA 6. Sistemas de ecuaciones

ALGO DE TEORIA PARA ABORDAR LOS PROBLEMAS…

¿Cómo resolvemos un problema de sistemas de ecuaciones?

En primer lugar, antes de comenzar a practicar este tipo de problemas debemos tener en cuenta una serie de consejos que nos serán útiles. Para resolver un problema debemos:

- Antes de comenzar, realizar una lectura detenida del mismo. Familiarizarnos con el problema es clave antes de empezar.
- Una vez hemos entendido el contexto y el tipo de problema que se nos plantea, debemos realizar el planteamiento de este.
- Si es necesario, realizaremos un dibujo, una tabla, o una representación de lo expuesto. Una vez hecho, intentamos identificar la incógnita y los datos que aporta el problema.
- Para plantear las ecuaciones volveremos al problema y debemos “traducir” el mismo a una expresión algebraica.
- En este tipo de problemas con más de una incógnita debemos encontrar tantas ecuaciones como incógnitas se nos presenten. Es decir, si tenemos dos incógnitas debemos encontrar dos ecuaciones, si tenemos tres, tres ecuaciones.
- El siguiente paso es resolver el sistema de ecuaciones.
- Por último y muy importante, debemos interpretar la solución.

Existen diferentes métodos de resolución:

- Método de sustitución.
- Método de reducción.
- Método de igualación.

1. Método de sustitución

A través del método de sustitución lo que debemos hacer es **despejar una de las incógnitas** en una de las ecuaciones y **sustituir su valor en la siguiente**. Lo veremos con más detalle en el siguiente ejemplo:

$$\left.\begin{array}{ccc} x & +y & =7 \\ 5x & -2y & =-7 \end{array}\right\}$$

En primer lugar, despejamos una de las incógnitas en la primera ecuación.

x +y= 7

x=7-y

A continuación, **sustituimos** en la segunda ecuación el valor correspondiente de la "x".

5.x-2y=-7

5.(7-y)-2y=7

Ahora, **despejamos la "y"**.

35-5y-2y=-7

35-7y=-7

-7y=-7-35

-7y=-42

y=-42/-7=6

y=6

Por último, utilizamos el valor de "y" para hallar el valor de "x".

x= 7-y

x=7-6=1

x=1

La solución de nuestro sistema es x=1 e y =6.

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & +6 & =7 \\ 5.1 & -2.6 & =-7 \end{array}\right\}$$

2. *Método de igualación*

El método de igualación consiste en **despejar la misma incógnita** en las dos ecuaciones y después **igualar los resultados**.

$$\left.\begin{array}{lll} x & +y & =7 \\ 5x & -2y & =-7 \end{array}\right\}$$

Los pasos a seguir son los siguientes:

En primer lugar, elegimos la incógnita que deseamos despejar. En este caso, empezaré por la "x" y despejo la misma en ambas ecuaciones.

x+y=7;

x=7-y

5x-2y=-7;

5x=2y-7;

x= (2y-7)/5

Una vez hemos despejado, igualamos:

7-y=(2y-7)/5

5(7-y=(2y-7)/5)

35-5y=2y-7

42=7y

y=42/7=6

y=6

Por último, sustituimos el valor que hemos calculado despejando la otra incógnita en una de las ecuaciones iniciales.

x=**7-y**

x=7-6=1

x=1

La solución de nuestro sistema es x=1 e y =6.

3. Método de reducción

Con el método de reducción lo que **hacemos es combinar, sumando o restando**, nuestras ecuaciones para que **desaparezca una de nuestras incógnitas**.

Los pasos a seguir son los siguientes en el siguiente ejemplo:

$$\left.\begin{array}{rrl} x & +y & =7 \\ 5x & -2y & =-7 \end{array}\right\}$$

En primer lugar, necesitamos preparar las dos ecuaciones, si es necesario, multiplicándolas por los números que convenga.

En este caso, queremos reducir la "y" de nuestro sistema, por tanto, multiplicamos la primera ecuación por 2.

2(x+y=7)

5x-2y=-7

Así, el sistema se queda:

$$\left.\begin{array}{rrl} 2x & +2y & =14 \\ 5x & -2y & =-7 \end{array}\right\}$$

Si nos fijamos, sumando las ecuaciones la "y" nos desaparece.

$$\begin{array}{rrl} 2x & +2y & =14 \\ +5x & -2y & =-7 \\ \hline +7x & 0 & =7 \end{array}$$

$7x=7$

$x=7/7=1$

$x=1$

Por último, sustituimos el valor que hemos calculado despejando la otra incógnita en una de las ecuaciones iniciales.

$y= 7-x$

$y=7-1=6$

$y=6$

La solución de nuestro sistema es x=1 e y =6.

PROBLEMAS

1. Una granja tiene cerdos y pavos, en total hay 35 cabezas y 116 patas. ¿Cuántos cerdos y pavos hay?
2. En un almacén de productos deportivos había un día 70 bicicletas, entre plegables y normales. Una semana después tenían el doble de bicicletas plegables y 12 bicicletas normales más que la semana anterior, con lo que había 100 bicicletas en el almacén.
3. Carlos le dice a Juan: "el dinero que yo tengo es el doble que tú tienes", y Juan le responde "si me das 6 euros los dos tendremos la misma cantidad" ¿Cuánto dinero tiene cada uno al principio?
4. Un transportista lleva en su furgoneta sacos de arroz de dos pesos distintos. Los sacos grandes tienen un peso de 30 kg, mientras que los pequeños pesan un 20% menos. El conductor recuerda que el número de sacos pequeños es el triple del de sacos grandes, y que el peso total de la mercancía es de 714 kilogramos. Calcula el número de sacos de cada tipo que se transportan.
5. Una empresa ha gastado 1500 euros en comprar un móvil a cada uno de sus 25 empleados. Su compañía telefónica ofertó dos modelos diferentes, uno a 75 euros y otro a 50 euros. ¿Cuántos móviles de cada modelo compró?
6. En un almacén hay botellas de aceite de 5 litros y 2 litros. En total hay 1000 litros de aceite y 323 botellas. ¿Cuántas botellas de cada tipo hay?
7. Descomponer el número 48 en dos partes tales que al dividir la primera entre la segunda da 3 de cociente y 4 de resto.
8. La razón de dos números es 3/4. Si se le suma 10 unidades a cada uno de ellos la razón de los nuevos números es 11/14. Averigua de qué números se trata.
9. Un grupo de amigos fueron dos días a un bar, donde hicieron consumiciones que pagaron con un fondo común. Ahora quieren saber el gasto que hizo cada uno, pero no recuerdan los precios de los artículos. Recuerdan que el primer día pagaron 21,60 € por 5 bocadillos y 8 bebidas, y que el segundo día pagaron 13,20 € por 3 bocadillos y 5 bebidas. Todos los bocadillos tenían el mismo precio, al igual que todas las bebidas. Calcula el precio de cada bocadillo y cada bebida.

10. En un garaje hay 110 vehículos entre coches y motos y sus ruedas suman 360. ¿Cuántas motos y coches hay?

11. En una tienda de alimentación han vendido paquetes de queso a 9 € la unidad y sobres de salmón ahumado. Un sobre de salmón cuesta 6 € más que un paquete de queso. Han vendido el doble de paquetes de queso que de sobres de salmón y han obtenido por la venta de todos estos productos 858 euros. Averigüe cuántas unidades de cada producto han vendido.

12. La base de un rectángulo es doble que su altura. ¿Cuáles son sus dimensiones si el perímetro mide 30 cm?

13. En una granja hay doble número de gatos que de perros y triple número de gallinas que de perros y gatos juntos. ¿Cuántos gatos, perros y gallinas hay, si en total son 96?

14. La edad de Juan es doble que la de Ana. Si Juan tuviera 10 años menos y Ana 5 más, los dos tendrían la misma edad. ¿Qué edad tienen?

15. En un corral hay conejos y gallinas, que hacen un total de 61 cabezas y 196 patas. Hallar el número de conejos y gallinas que hay.

16. En una reunión de chicos y chicas, el número de éstas excede en 26 al de aquellos. Después de haber salido 15 chicos y 15 chicas, quedan el triple de éstas que de aquellos. Hallar el número de chicos y chicas que había en la reunión.

17. Un número está compuesto de dos cifras cuya suma es 9. Invirtiendo el orden de colocación de las cifras, resulta un número inferior en 27 unidades al dado. Calcular el número.

18. Trece lapiceros y siete bolígrafos se han vendido por 12.98 euros. Calcular el precio de cada uno de los elementos, sabiendo que el valor de un bolígrafo es doble que el de un lapicero.

19. Juan tiene 18 años más que Jorge y hace tres años tenía el doble. Calcular las edades de cada uno.

20. En un examen tipo test hay 20 preguntas. Por cada respuesta correcta se obtiene un punto. Si la respuesta es incorrecta se disminuye la nota en 0'2 puntos. Si la calificación de Alejandro ha sido 12,8 puntos, ¿cuántas preguntas ha respondido correctamente y cuántas ha fallado?

21. Este problema apareció en Bagdad en el siglo XI. Se titula "Los dos camelleros":

Camellero A: "Si tú me das un camello tendremos el mismo número de camellos"

Camellero B: "Sí, y si tú me das a mí un camello, yo tendré doble que tú"

Decidme, doctos matemáticos, ¿cuántos camellos tienen cada uno?

TEMA 7. Progresiones

1. Sucesiones

Una sucesión es un conjunto de números dados ordenadamente de modo que se puedan numerar: primero, segundo, tercero…

Ejemplos:

a) 1, 3, 5, 7, 9, 11…

b) 1, 4, 9, 16, 25, 36…

c) 2, 4, 8, 16, 32, 64…

Se llaman términos a los elementos de la sucesión y se suelen designar mediante una letra con subíndice. El subíndice indica el lugar que ocupa el término en la sucesión. NO tenéis que confundir el lugar que ocupan con el valor.

En los ejemplos anteriores tenemos:

a)

Término	Lugar que ocupa	Valor
a_1	Primero	1
a_2	Segundo	3
a_3	Tercero	5
a_4	Cuarto	7
a_5	Quinto	9
a_6	Sexto	11

b)

Término	Lugar que ocupa	Valor
a_1	Primero	1
a_2	Segundo	4
a_3	Tercero	9
a_4	Cuarto	16
a_5	Quinto	25
a_6	Sexto	36

c)

Término	Lugar que ocupa	Valor
a_1	Primero	2
a_2	Segundo	4
a_3	Tercero	8
a_4	Cuarto	16
a_5	Quinto	32
a_6	Sexto	64

Se llama **término general** de una sucesión a una expresión que sirve para obtener un término cualquiera de la sucesión con sólo saber el lugar que ocupa. Es decir, sustituyendo la "n" por los naturales me da el valor del a_1, a_2, ….

Habitualmente al término general se le denota por a_n.

En los ejemplos anteriores, lo términos generales son:

a) $a_n = 2n-1$ Si sustituimos la n por 4 tenemos, $a_4=2·4-1=7$ Si miramos en la tabla, el cuarto término vale 7

b) $a_n = n^2$ Si sustituimos la n por 5 tenemos, $a_5=5^2=25$ obtendríamos el quinto término. Si sustituimos la n por 10 $a_{10}=10^2=100$ es decir, que el décimo término de esa sucesión vale 100.

c) $a_n = 2n$

Hay sucesiones que en las que es fácil calcular el término general (como las anteriores), pero, hay otras en las que cada término se obtiene operando los anteriores. Estas sucesiones se llaman **sucesiones recurrentes**.

Ejemplo:

1, 1, 2, 3, 5, 8, ….. (Sucesión de Fibonacci)

Cada término es la suma de los dos anteriores:

2=1+1

3=2+1

5=3+2

8=5+3

¿Cuál sería el siguiente? 8+5=13

En este caso no habría término general porque para calcular el quinto término no se puede hacer sustituyendo en la "fórmula". Habría que calcular todos los anteriores.

Por eso en este tipo de sucesiones, se da la <u>ley de recurrencia.</u>

Ley de recurrencia: $a_n= a_{n-1} + a_{n-2}$ ($a_1= 1$; $a_2 =1$)

Ejercicios:

1. Escribir la expresión del término general de las siguientes sucesiones:

a) 12, 14, 16, 18, ….

b) 1, 3, 9, 27, ……

c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

2. Calcular la ley de recurrencia de las siguientes sucesiones

a)8, 10, 2, -8, -10, ……

b) 4, 1, 3, -2, 5, …….

3. Escribir los 4 primeros términos de las siguientes sucesiones e indica que forma la describe (recurrente o general)

a) $a_n=2·a_{n-1}-a_{n-2}$ con $a_1=2$, $a_1=1$

b) $a_n=n^2-1$

c) $a_n=\frac{3n-1}{2n}$

d)$a_n=1-a_{n-1}$ $a_1=0$

2. Progresiones aritméticas

Una **progresión aritmética** es una serie infinita de términos de tal manera que cada término se forma sumando al anterior una cantidad fija llamada diferencia.

Ejemplos:

a) 1, 4, 7, 10, 13, …. Cada término se forma sumando 3 al anterior, luego la diferencia sería 3, d=3.

b) -3, -1, 1, 3, 5, … d=2.

c) $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$, … d=$\frac{1}{2}$

2.1. Término general

Tenemos una progresión aritmética a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n, ... Según la definición, cada término es igual al anterior más la diferencia (d), por lo que

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$

Generalizando este proceso se obtiene el término general:

$$\boxed{a_n=a_1+(n-1)\cdot d}$$

donde a_1 es el primer término, n es el lugar que ocupa y d es la diferencia.

Ejemplos:

1. Calcula el término general de los ejemplos anteriores.

a) 1, 4, 7, 10, 13, …

Lo primero que tenemos que hacer es buscar a_1 y d. Como a_1 es el primer término $a_1=1$. Para calcular la diferencia, restamos un término menos el anterior, así d=4-1=7-4=10-7=13-10=3 No hace falta que hagas todas las restas (son todas iguales), basta con hacer una. Y ahora sustituyes en la fórmula recuadrada y haces las cuentas.

$a_n=1+(n-1)\cdot 3= 3n-2$

Vamos a comprobar que lo he hecho bien (no es necesario hacerlo, pero garantizas que esté bien)

$a_2=3\cdot 2-2= 6-2=4$ el segundo término es 4, luego está bien.

$a_3=3\cdot 3-2=9-2=7$, el tercer término es 7

$a_4=3\cdot 4-2=12-2=10$, el cuarto término es 10

b) -3, -1, 1, 3, 5, …

$a_1=-3$

$d= -1-(-3) =-1+3=2$

$a_n=-3+(n-1) \cdot 2= 2n-5$

c) $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ \dots$

$a_1=\frac{1}{2}$

$d=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$a_n=\frac{1}{2}+(n-1)\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$

2. El término general nos sirve para calcular cualquier término de la sucesión, por ejemplo:

Calcula el trigésimo término en: 1, 6, 11, 16, ...

Lo primero que tenemos que hacer es calcular el término general,

$a_1=1$

$d= 6-1 =5$

$a_n=1+(n-1) \cdot 5= 5n-4$

Ahora lo único que tenemos que hacer es sustituir la n por 30.

$a_{30}= 5 \cdot 30-4=146$

EJERCICIOS:

1. En las siguientes progresiones aritméticas, halla:

a) El término 20 en: 1, 6, 11, 16, ...

b) El término 6 en: 3, 7, 11, 15, ...

c) El término 12 en: -4, 0, 4, 8, ...

d) El término 10 en: 2, 5, 8, 11, ...

2. Halla los términos a_4, a_7, a_2, a_{10} de las sucesiones:

a) $a_n=3n-2$.

b) $a_n=n2-1$.

c) $a_n=4n-3$.

d) $a_n=2n+3$

3. Hallar el término a_{10} en una progresión aritmética en la que $a_1=5$ y la diferencia es $d=- 3$.

4. Calcula el término general de las sucesiones:

a) -1,1,3,5,7,9

b) 3,6,9,12,15,18

c) 5,6,7,8,9

d) -2,0,2,4,6

5. Calcula el primer término de una progresión aritmética que consta de 10 términos, si se sabe que el último es 34 y la d=3.

6. En una progresión aritmética $a_{12} = -7$ y $d = -2$. Hallar a_1.

7. En una progresión aritmética $a_{20}=-33$ y $a_{12}=-28$, hallar a_1 y d.

8. En una progresión aritmética $d=5$ y $a_{25}=110$, hallar a_{20}.

9. ¿Cuántos términos tiene una progresión aritmética cuyo primer término es 8 y el último 36, si la diferencia es 2?

Se puede conseguir otra expresión del <u>término general en función de dos términos cualesquiera</u>, en lugar del primer término. La expresión es:

$$\boxed{a_p=a_q+(p-q)\cdot d}$$

EJERCICIOS

10. Los datos de cada uno de los apartados corresponden a una progresión aritmética. Calcular la incógnita que se indica en cada uno de ellos:

a) $a_{15}=-14$, $a_{24}=16$, $d=?$

b) $a_5=-10$, $a_{13}=-8$, $d=?$

c) $a_1=3$, $d=3$, $a_n=36$, $n=?$

d) $a_3=-5/3$, $a_8=-5$, $d=?$

e) $a_{11}=6$, $a_{35}=65$, $d=?$

2.2. Suma de los n primeros términos de una progresión aritmética

Tomemos los primeros términos de una progresión aritmética cualquiera, por ejemplo: 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26. Observa que

5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26

8 + 23 = 31

5 + 26 = 31

En general, en cualquier progresión aritmética $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_{n-1}, a_n$ se verifica que:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3+a_{n-2} \ldots.$$

Usando esta propiedad, se obtiene una fórmula para calcular la suma, S_n, de los n primeros términos de una progresión aritmética:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ \ldots\ + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ \ldots.\ + (a_2 + a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = (a_1 + a_n).n$$

Despejando tenemos,

$$\boxed{\mathbf{S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n}}$$

Vamos a calcular la suma de antes 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26

$a_1=5$, $n=8$, $a_8=26$

$$S_8 = \frac{5+26}{2} \cdot 8 = \frac{31}{2} \cdot 8 = 124$$

EJEMPLOS

Halla la suma:

a) De los 10 primeros términos de: 1, 6, 11...

$a_1=1$

$d= 6-1 =5$

$a_{10}=1+(10-1) \cdot 5= 46$

$$S_{10} = \frac{1+46}{2} \cdot 10 = \frac{47}{2} \cdot 10 = 94$$

b) De los 30 primeros términos de: 1/2, 3/4, 1...

$a_1=1/2$

$d= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$a_{30}=\frac{1}{2}+(30-1) \cdot \frac{1}{4}= \frac{31}{4}$

$$S_{30} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{31}{4}}{2} \cdot 30 = \frac{\frac{33}{4}}{2} \cdot 30 = \frac{495}{4}$$

EJERCICIOS

11. Hallar la suma de los términos de una progresión aritmética en los siguientes casos:

a) De los 25 primeros términos de: 3, 8, 13, ...

b) De los 22 primeros términos de; 42. 39, 36, ...

c) De los 40 primeros términos de: 1/2, 5/8, 3/4, ...

12. Hallar la suma de los 12 primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que $a_3=24$ y $a_{10}=66$.

13. Hallar la suma de los 20 primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que a_1 $=3$ y $a_{20}=79$.

14. Hallar la suma de los 1000 primeros números naturales: 1, 2, 3, ... 1 000.

15. Hallar la suma de los números pares: 2, 4, 6. .... 1 000.

16. Calcular la suma de los múltiplos de 59 comprendidos entre 1 000 y 2 000.

EJERCICIO RESUELTO:

¿Cuántos términos hay que sumar de la progresión aritmética 2, 8, 14 ... para obtener como resultado 1064?

Lo primero que tenemos que hacer es saber qué nos dan y saber qué nos piden:

- Que el resultado sea 1064, significa que S es 1064.
- De 2, 8, 14… podemos sacar el primer término, la diferencia y el último.
- Nos pregunta “cuántos términos” es decir “n”.

$d=8-2=6$

$a_1=2$

$a_n=a_1+d(n-1) =2+6(n-1) =6n-4$

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$1064 = \frac{2 + 6n - 4}{2} \cdot n$$

$$1064 \cdot 2 = (6n - 2) \cdot n$$

$$6n^2 - 2n - 2128 = 0$$

$$n = 59 \; y \; n = \frac{-56}{3}$$

Como n es un lugar, la solución es n=59.

17. ¿Cuántos números impares consecutivos a partir de 1 es preciso tomar para que su suma sea igual a 7 744?

18. El primer término de una progresión aritmética es 117, el último es -30 y la suma de los términos es 2175. Hallar el número de términos y la diferencia.

19. En una progresión aritmética los términos tercero y quinto suman 64, y el segundo y el séptimo 70. Calcular la diferencia y cada uno de los elementos.

20. En una progresión aritmética de 11 términos su suma es 176. La diferencia de los extremos es 30. Hallar los términos de la progresión. (Resuélvelo con un sistema de incógnitas a_1 y d)

22. Hallar los ángulos de un triángulo sabiendo que están en progresión aritmética y que uno de ellos es de 100º.

23. Un hombre se compromete a hacer un pozo en las siguientes condiciones: por el primer metro recibirá 400 € y por cada metro siguiente 100 € más. Si el pozo tiene 27 metros de profundidad, ¿cuánto recibirá?

24. En una plantación hay 51 filas de árboles. Cada fila tiene 2 árboles más que la anterior. La fila 26 tiene 57 árboles. Se desea saber el número de árboles que hay en la primera fila. en la última y el número total de árboles.

25. Un coronel manda 5050 soldados, y quiere formar con ellos un triángulo para una exhibición, de modo que la primera fila tenga un soldado, la segunda dos, la tercera tres, etc. ¿Cuántas filas habrá?

26. Un jardinero debe echar un caldero de agua al pie de cada uno de los 30 árboles que hay al lado del camino. Los árboles están a 6 metros de distancia y el pozo a 10 m antes del primer árbol. ¿Qué camino habrá recorrido después de haber terminado el riego y vuelto el caldero al pozo?

27. Por el alquiler de una casa se acuerda pagar 1000 € al mes durante el primer año, y año se aumentará el alquiler en 12 € mensuales

a) ¿Cuánto se pagará durante el decimosexto año al mes?

b) Hallar el importe pagado durante los 16 años

30. En una sala de cine la primera fila de butacas dista de la pantalla 86 dm y la sexta 134 dm. ¿En qué fila estará una persona si su distancia a la pantalla es de 230 dm?

31. Una persona compra a plazos una lavadora. El primer mes pagó 24’40 €, el segundo mes 28’60, el tercer mes 32’80 e, y así sucesivamente. El último mes pagó 62’20 €. ¿Durante cuántos meses ha tenido que pagar? ¿Cuánto ha costado la lavadora?

32. En un jardín hay 12 fuentes: la segunda arroja 2 litros más por minuto que la primera, la tercera 2 más que la segunda y así sucesivamente, arrojando en total 168 litros por minuto. ¿Cuánta agua echa por minuto cada fuente?

33. Un reloj de una torre solamente a las horas da tantas campanadas como indica la hora. Hallar el número de campanadas que da en un día.

3. Progresiones geométricas

Una **progresión aritmética** es una serie infinita de términos de tal manera que cada término se forma multiplicando al anterior por una cantidad fija llamada razón.

Ejemplos:

a) 1, 2, 4, 8, 16, …. Cada término se forma multiplicando por 2 al anterior, luego la razón sería 2, r=2.

b) -4, 2, -1, $\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{4}$, … r=$\frac{-1}{2}$.

c) -3, -6, -12, -24, … r=2

3.1. Término general

Tenemos una progresión geométrica $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n, \ldots$ Según la definición, cada término es igual al anterior multiplicado por la razón (r), por lo que

$a_2 = a_1 \cdot r$

$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2$

$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3$

Generalizando este proceso se obtiene el término general:

$$\boxed{a_n=a_1\cdot r^{(n-1)}}$$

donde a_1 es el primer término, n es el lugar que ocupa y r es la razón.

Ejemplos:

1. Calcula el término general de los ejemplos anteriores.

a) 1, 2, 4, 8, 16, ….

Lo primero que tenemos que hacer es buscar a_1 y r. Como a_1 es el primer término a_1=1. Para calcular la razón, dividimos un término entre el anterior, así

$\mathrm{r} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = 2$ No hace falta que hagas todas las divisiones (son todas iguales), basta con hacer una. Y ahora sustituyes en la fórmula recuadrada.

$a_n=1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

Vamos a comprobar que lo he hecho bien (no es necesario hacerlo, pero garantizas que esté bien)

$a_2=2^{2-1} = 2$ el segundo término es 2, luego está bien.

$a_3=2^{3-1}=2^2=4$, el tercer término es 4

$a_4=2^{4-1}=2^3=8$, el cuarto término es 8

b) -4, 2, -1, $\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{4}$, ...

a_1=-4

$$r=\frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}$$

$a_n=(-4)\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}$

c) -3, -6, -12, -24, ...

a_1=-3

$r=\frac{-6}{-3}=2$

$a_n=(-3)\cdot 2^{n-1}$

2. Hallar el término duodécimo de la progresión: 2, 4, 8, ...

Lo primero que tenemos que hacer es calcular el término general,

a_1=2

$r=\frac{4}{2}=2$

$a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

Ahora lo único que tenemos que hacer es sustituir la n por 12.

$a_{12}=2^{12}=4096$

EJERCICIOS:

34. Calcula el término general de:

a) 1, 4, 16, 64, ...

b) 3, -9, 27, -81, ...

c) -2, 10, -50, 250, ...

d) 27, 9, 3, 1, ...

35. Hallar el duodécimo término de la progresión: 1/1 000. 1/100, 1/10, ...

36. Determinar los 7 primeros términos de una progresión geométrica si los dos primeros valen 4 y 3 respectivamente.

37. El término a_7 de una progresión geométrica vale 243 y la razón 3. Hallar el primer término.

38. En una progresión geométrica a_{12}=72 y la razón r=1/2. Hallar el término octavo.

39. En una progresión geométrica a_1=6 y a_{15}=54. Hallar el término a_6

40. Dos términos consecutivos de una progresión valen 6 y 8, respectivamente. Hallar el lugar que ocupan si el primer término de la progresión vale 81/32.

41. En una progresión geométrica a_1=6 y la razón es 2. Hallar el lugar que ocupa el término que vale 6144.

Se puede conseguir otra expresión del término general en función de dos términos cualesquiera, en lugar del primer término. La expresión es:

$$\boxed{a_p = a_q \cdot r^{(p-q)}}$$

EJERCICIOS

42. En una progresión geométrica se sabe que $a_{15}=512$ y $a_{11}=32$. Hallar el primer término y la razón.

43. En una progresión geométrica $a_5=160$ y $a_2=20$. Hallar la razón y los 7 primeros términos.

3.2. Suma de los n primeros términos de una progresión geométrica

La deducción de la fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica es complicada, por eso basta con que te demos la fórmula

$$\boxed{\mathbf{S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r} = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}}}$$

Vamos a calcular la suma de 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384

$n=8$ $a_1=3$ $a_8=384$ $r=6/3=2$

$$S_8 = \frac{3 - 384 \cdot 2}{1 - 2} = \frac{-765}{-1} = 765$$

EJEMPLOS

Halla la suma de los diez primeros términos de:

a) $a_1=0'1$, $r=2$

$$a_{10}=0'1 \cdot 2^9 = 51'2$$

$$S_{10} = \frac{0'1 - 51'2 \cdot 2}{1 - 2} = \frac{-102'3}{-1} = 102'3$$

b) 10, 1, 0'1, …

$$a_1=10$$

$$r=\frac{1}{10}$$

$$a_{10}=10 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^9 = \left(\frac{1}{10}\right)^8$$

$$S_{10} = \frac{10 - \left(\frac{1}{10}\right)^8 \cdot \frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{9999999999}{10^9}}{\frac{9}{10}} = 11'\hat{1}$$

3.3. Suma de los infinitos términos de una progresión geométrica

Cuando la razón de una progresión geométrica es, en valor absoluto, menor que 1 se puede calcular la suma de los infinitos términos de dicha progresión geométrica.

Por tanto, la fórmula de la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica en la que $|r| < 1$, es:

$$\boxed{\mathbf{S = \frac{a_1}{1-r}}}$$

EJEMPLO:

Halla la suma de los infinitos términos de la progresión geométrica: 8, 4, 2, …

$a_1=8$

$r=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

$$S=\frac{8}{1-\frac{1}{2}}=16$$

EJERCICIOS:

44. Sabiendo que $a_1=7$ y $r=2$, hallar la suma de los 9 primeros términos de la progresión geométrica

45. Hallar la suma de los 10 primeros términos de la progresión geométrica: 4/3. 2/3, 1/3, ….

46. ¿Cuántos términos se han tomado en una progresión geométrica siendo $a_1=7$, el último considerado 448 y la suma 889?

47. La suma de los 7 primeros términos de una progresión geométrica de razón 3 es 7651. Hallar el primero y el séptimo término.

EJERCICIO RESUELTO: A Isabel y Andrés les han confiado, a las nueve de la mañana, un secreto. Cada uno de ellos, al cuarto de hora, se lo han contado a tres amigos. Estos a otros tres, ..., etc. ¿Cuánta gente lo sabrá a las 2 de la tarde?

Lo primero que tenemos que hacer es qué datos nos dan y qué n os piden.

$a_1=2 \quad a_2=6$ r=3

Desde las 9 de la mañana hasta las dos de la tarde hay 5 horas, por lo tanto 5·4=20 cuartos de hora, es decir n=20.

Y nos piden cuánta gente a las 2, es decir, a_{20}

Una vez que sabemos lo que tenemos y lo que nos piden utilizamos las fórmulas adecuadas.

$$a_{20}=a_1\cdot r^{19}=2\cdot 3^{19}=2.324.522.934$$

48. Las amplitudes de las sucesivas oscilaciones de un péndulo forman una progresión geométrica: 16, 12, 9, ... cm. Hallar la distancia total recorrida por la esferilla del péndulo hasta alcanzar el reposo.

49. En una ciudad que cuenta con 29 524 habitantes mayores de 10 años, uno de ellos se entera de una noticia en un cieno instante. Al cabo de un minuto lo ha comunicado a 3 de sus vecinos. Cada uno de éstos lo comunica en otro minuto a otros 3 vecinos distintos, los cuales continúan extendiendo la noticia de igual modo. ¿Al cabo de cuánto tiempo se habrán enterado todos los vecinos?

50. A una cuerda de 700 m de longitud se le dan dos cortes, de modo que uno de los trozos extremo tiene una longitud de 100 m. Sabiendo que la longitud de los trozos está en progresión geométrica, determinar la longitud de cada trozo.

51. Un extraño mercader se presenta en una posada y para pagar los servicios ofrece al mesonero el siguiente trueque: «Yo pagaré 100 000 ducados todos los días del mes, pero a cambio vos me daréis 1 ducado el primer día, 2 el segundo día, 4 el tercero y así sucesivamente, duplicando siempre la cantidad anterior». Pareciόle buen negocio al mesonero y aceptó el trato. Hallar la liquidación al cabo de los 30 días del mes. ¿Quién salió ganando?

52. Hallar la suma de una progresión geométrica ilimitada de razón r=2/3 y cuyo primer término vale 6

53. Hallar la suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada cuyo primer término es 16 y la razón 3/4.

TEMA 8. Funciones y gráficas

1. Definición de función

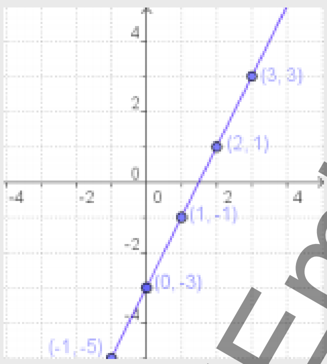
Una **función** es una relación entre dos magnitudes de forma que a cada valor de una (variable independiente “x”) le hacemos corresponder, como mucho, un único valor de la otra (variable dependiente “y=f(x)”).

Para obtener la gráfica de una función a partir de la tabla de valores, primero se dibujan unos ejes de coordenadas, representándose los valores de la variable independiente (x) en el eje horizontal (abscisas) y los de la variable dependiente (y) en el vertical (ordenadas). Cada pareja de valores de las variables dependiente e independiente se representa mediante un punto (x, y) en el sistema de coordenadas. Los puntos dibujados se unirán si la variable independiente puede tomar cualquier valor real en el rango estudiado. La línea (recta o curva) que resulta es la gráfica de la función.

Ejemplo: representación de la gráfica de una función a partir de la tabla de valores.

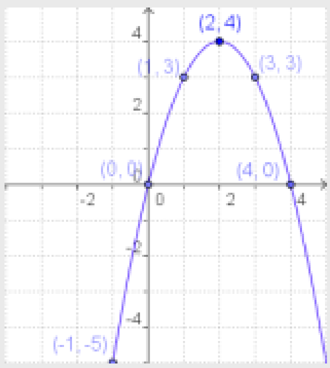
a) $f(x)=2x-3$

x	f(x)
0	-3
1	-1
2	1
3	3
-1	-5
-2	-7



b) $f(x)=-x^2+4x$

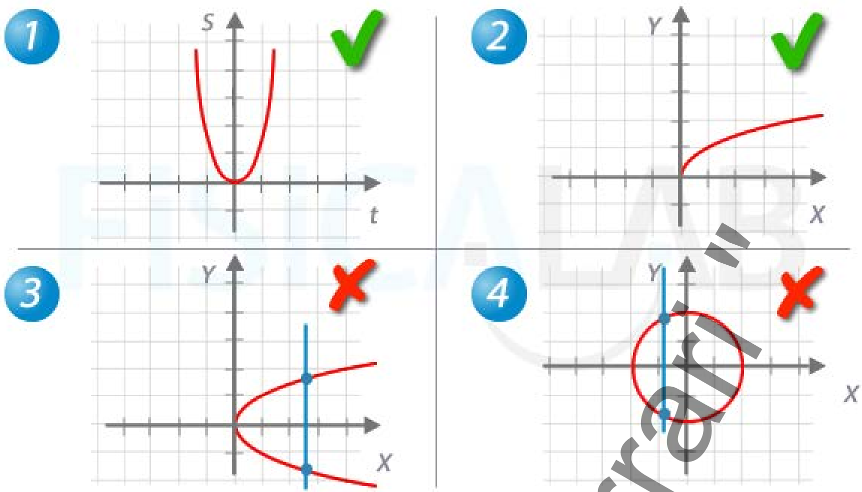
x	f(x)
0	0
1	3
2	4
3	3
4	0
-1	-5



Un criterio para saber si una gráfica corresponde a una función es buscar una línea totalmente vertical que la atraviese en más de un punto. Si puedes encontrarla, significaría que para ese valor de *x* corresponderían varios valores de *y*, y por tanto la gráfica *no corresponde* a una función.

Ejemplo:

> En una gráfica de una función *y=f(x)* ninguna recta vertical la debe cortar en más de un punto.

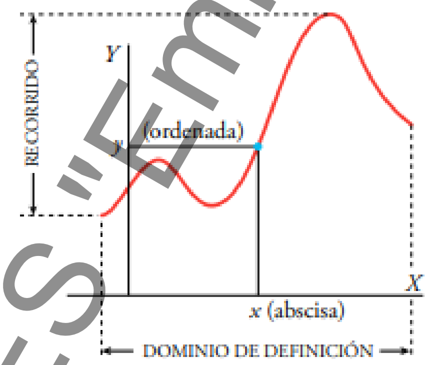


Las gráficas 1 y 2 corresponden a funciones. La 3 y la 4 no, pues son atravesadas por las rectas verticales, en azul, en dos puntos distintos cada una.

2. *Definición de dominio y recorrido*

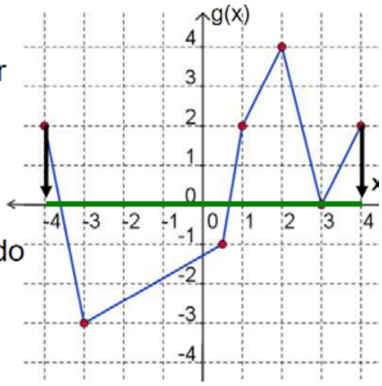
El **dominio** de una función es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable x.

El **recorrido o imagen** de una función es el conjunto de todos los valores que toma la variable y.



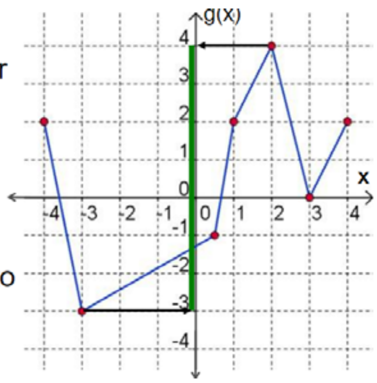
Ejemplo del estudio del dominio y recorrido de una función a partir de su gráfica:

- El dominio se puede identificar proyectando la gráfica hacia el eje horizontal marcando el extremo izquierdo y derecho



Dominio: [-4, 4]

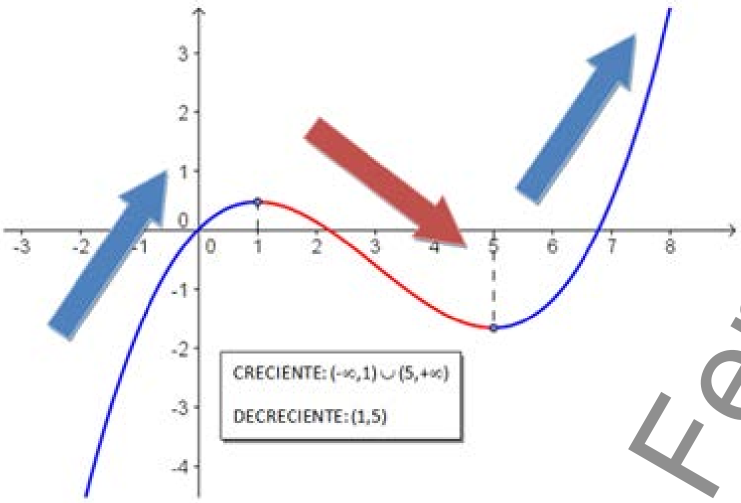
- El recorrido se puede identificar proyectando la gráfica hacia el eje vertical, desde el punto más bajo hasta el punto más alto



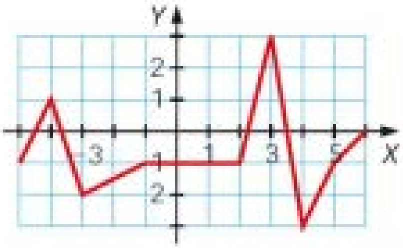
Recorrido: [-3, 4]

3. *Crecimiento y decrecimiento de una función*

Una función es **creciente** cuando al aumentar la variable independiente, x, aumenta la variable dependiente, y. Una función es **decreciente** cuando al aumentar x disminuye y. **Ejemplo** del **estudio de la monotonía de una función**, es decir del crecimiento y decrecimiento de una función:



Ejemplo: determina el crecimiento y el decrecimiento de esta función:



La función crece en (-∞, -4) ∪ (-3,-1) ∪ (2,3) ∪ (4, ∞)

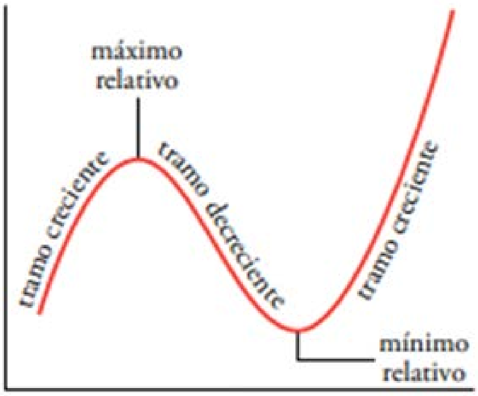
La función decrece en (-4,-3) ∪ (3,4)

La función es constante en (-1,2)

4. *Máximos y mínimos relativos de una función*

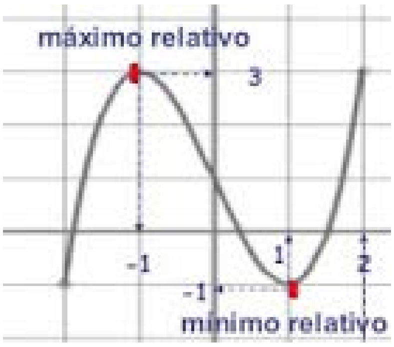
Una función tiene un **máximo relativo** en un punto cuando su ordenada (y) es mayor que la ordenada de los puntos que lo rodean.

Una función presenta un **mínimo relativo** en un punto cuando su ordenada (y) es menor que los puntos que lo rodean.



Al valor mayor de la función se le llama **máximo absoluto** y al valor menor de la función se le llama mínimo absoluto.

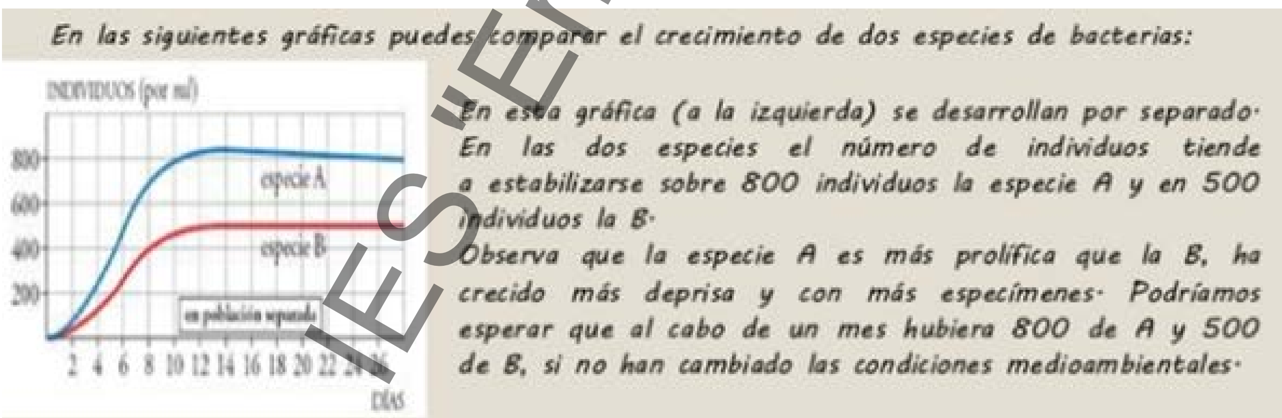
Ejemplo: Estudia los máximos y mínimos relativos de la siguiente función:



El máximo relativo lo tendrá en el punto (-1,3) y el mínimo relativo lo tiene en el punto (1,-1)

5. *Tendencia de una función*

Dentro de la interpretación de la gráfica es interesante estudiar la tendencia, es decir, deducir cómo podría continuar la gráfica y la relación entre las magnitudes que se relacionan a partir de lo que ya se tiene dibujado.



6. *Periodicidad*

Una función es **periódica** cuando la gráfica de la misma se repite de manera idéntica cada vez que la variable independiente x recorre cierto intervalo. La longitud de ese intervalo recibe el nombre de periodo.

- En los casos que sepamos que la función es periódica pero solo conozcamos un trozo de la curva, podemos saber cómo se comporta la función fuera de ese tramo.

Ejemplo de una función periódica:

Los cestillos de una noria van subiendo y bajando a medida que la noria gira. Estos son los datos de una cesta que sube desde el punto más bajo al más alto:

TIEMPO (s)	4	8	12	16	20
ALTURA (m)	3,7	7	9,7	11,4	12

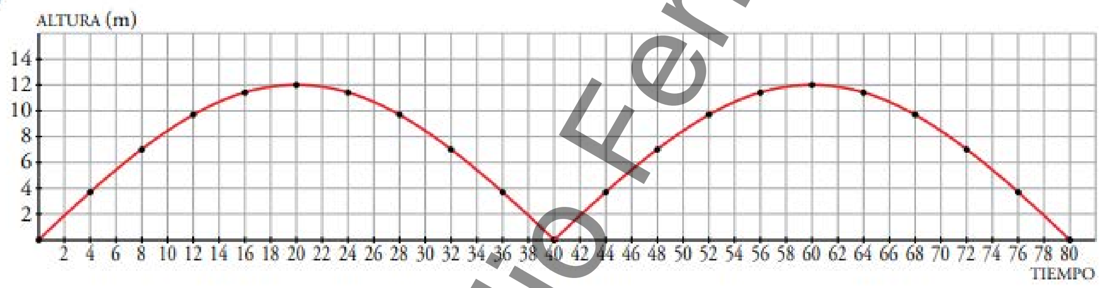
a) Representa la gráfica de la función tiempo-altura de uno de los cestillos a lo largo de 80 segundos.

b) ¿Es una función periódica?

c) ¿A qué altura estará la cesta a los 150 segundos?

Solución:

a)



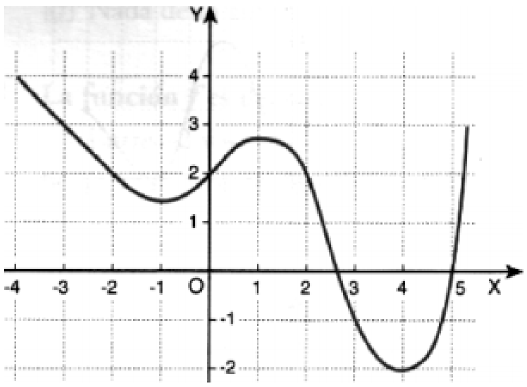
b) Si, de periodo 40.

c) Como los valores se repiten cada 40 segundos, tenemos que ver con qué valor corresponde 150 de entre 0 y 40. Dividimos 150 entre 40 y obtenemos como cociente 3 y de resto 30. Es decir, corresponderá con la altura para 30 segundos, que es aproximadamente 8 metros.

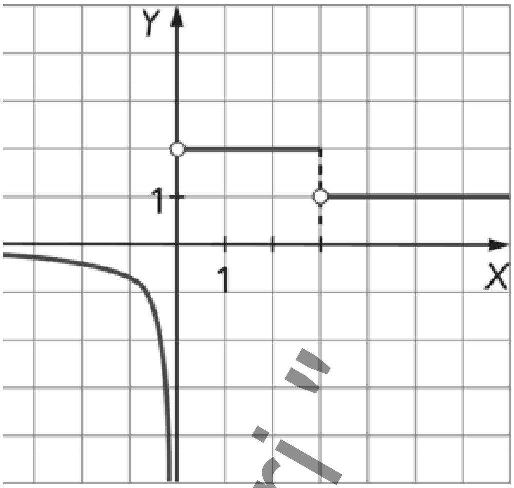
7. Continuidad

Una función se llama **continua** cuando no presenta discontinuidad de ningún tipo. Por tanto, su gráfica se puede trazar sin levantar el lápiz del papel.

Ejemplo de función continua y discontinua:



Esta es una función continua en todo su dominio



Esta función es discontinua en x = 0 , x = 3

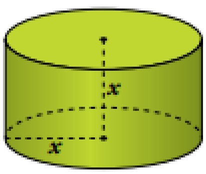
Podemos decir que es continua sólo en los tramos:
1) Desde menos infinito hasta el 0
2) En el tramo 0-3
3) Desde el 3 hasta el infinito

8. *Expresión analítica de una función*

La **expresión analítica** de una función es una ecuación o fórmula que relaciona la "x" con la "y".
Por ejemplo, la ecuación $y=x^2$ es la expresión analítica que le hace corresponder a cada valor del lado "x" de un cuadrado, su área, "y".

Ejemplo: Imagina un cilindro cuya altura, x, sea igual al radio de su base.

a) ¿Cuál es la expresión analítica de su volumen? (Volumen del cilindro es el área de la base por la altura)
b) Obtén la expresión analítica del área del cilindro

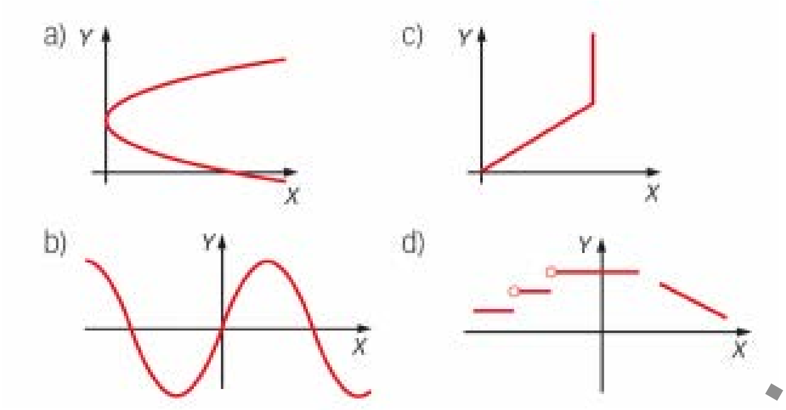


a) $V = \pi x^2 \cdot x \rightarrow V = \pi x^3$

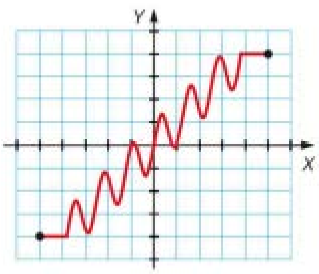
b) $A_{\text{CILINDRO}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h \rightarrow A = 2\pi x^2 + 2\pi x^2 \rightarrow A = 4\pi x^2$

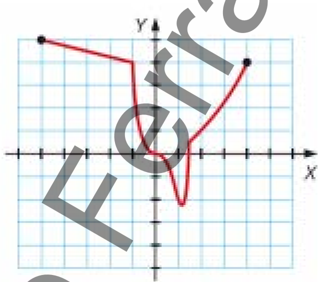
EJERCICIOS:

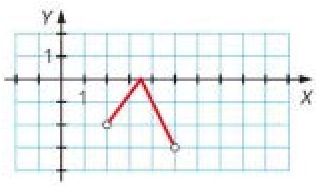
1. Indica cuáles son funciones y cuáles no.

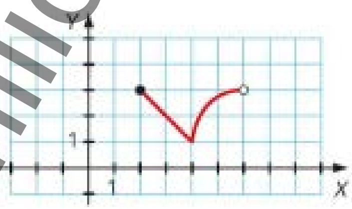


2. Indica el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

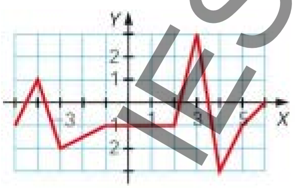


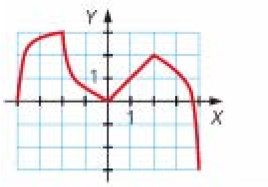




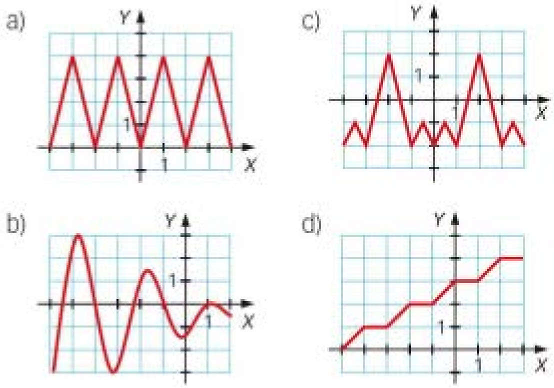


3. Determina el crecimiento, el decrecimiento, los máximos y los mínimos de estas funciones:



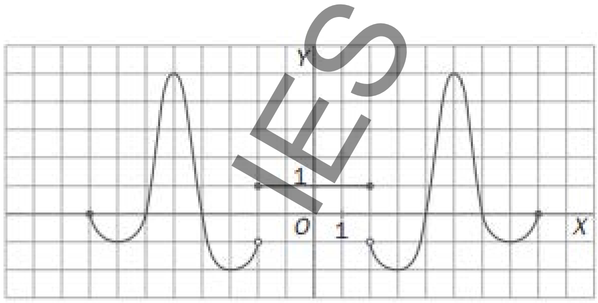


4. Señala qué funciones son periódicas y su periodo:



5. Observa la gráfica de esta función y determina los puntos de discontinuidad y los puntos de corte con los ejes.

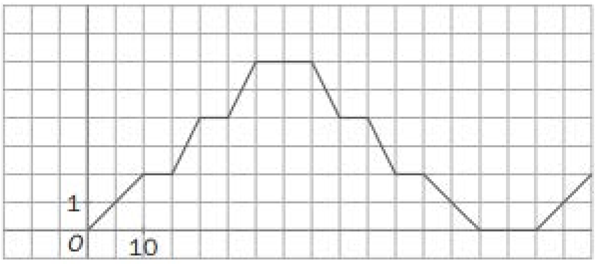
6. Dibuja una función continua para todos los valores de x excepto x=-2 y x=4 y que corte con los ejes en (0,4), (2,0) y (6,0).
7. Encuentra la expresión algebraica de la relación que a cada número le hace corresponder:
   a) Su tercera parte más dos
   b) La mitad de su triple
   c) La raíz cuadrada de su cubo.
8. Observa la gráfica y estudia las siguientes propiedades:



   a) Dominio y recorrido
   b) Intervalos de continuidad y discontinuidades
   c) Crecimiento y decrecimiento.
   d) Máximos y mínimos absolutos y relativos.
9. Un anuncio por palabras en un diario cuesta 2,80 euros la palabra y se establece un mínimo de tres palabras para poder ser admitido.
   a) Elabora una tabla y una gráfica de la función que relacione el número de palabras con el precio del anuncio.
   b) ¿Es continua la función?
   c) ¿Dónde existen discontinuidades?

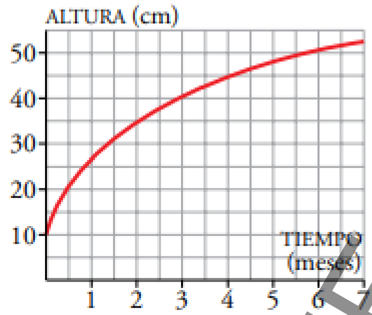
d) ¿Existe algún intervalo donde la función sea continua?

10. Un autobús universitario realiza cada día dos paradas, además de la inicial, para recoger estudiantes. La gráfica muestra su recorrido diario.



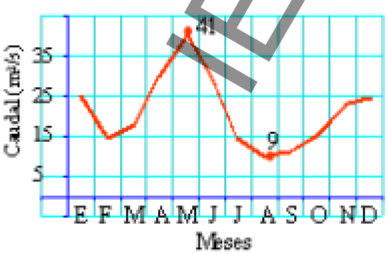
a) ¿Es periódica la función? Si la respuesta es afirmativa indica el periodo
b) ¿A cuántos kilómetros está la universidad?
c) ¿Cuánto tiempo tarda en realizar el trayecto a la universidad?
d) ¿Cuánto tiempo está parado en todo su recorrido?
e) ¿Qué significa el decrecimiento de la gráfica?

11. La gráfica representa el tamaño de una planta con el paso del tiempo.



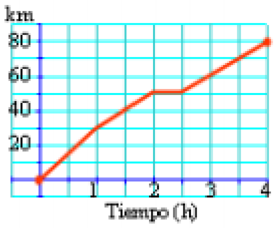
a) ¿Cuánto medía cuando se plantó?
b) ¿Es la función creciente? Explica por qué es lógico que lo sea
c) ¿Se aprecia alguna tendencia en la función?

12. La gráfica adjunta muestra el caudal de un río a su paso por un determinado punto de su recorrido.



a) ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la dependiente?
b) ¿Cuál es el dominio y el recorrido?
c) ¿En qué meses aumenta el caudal? ¿En qué meses disminuye?
d) ¿Cuándo alcanza su caudal máximo y cuándo alcanza el mínimo? ¿Cuánto valen su máximo y su mínimo?

13. En la siguiente gráfica se muestra la relación entre el tiempo y la distancia recorrida en una marcha ciclista.



a) ¿Qué mide la variable independiente? ¿Y la variable dependiente?

b) Indica su dominio y su recorrido.

c) ¿Qué distancia aproximada recorren en la segunda hora de carrera?

d) ¿Cuánto tiempo descansan?

e) ¿En qué hora recorren más kilómetros?

f) ¿Cuánto dura la marcha y qué velocidad media han llevado?

14. Representa este enunciado mediante una gráfica:

Tomás salió a pasear a las 18:00 horas. A las 18:30 h se encontró con Juan y se detuvo media hora.

Luego siguió andando hasta que a las 19:30 horas llegó a una ermita. Allí decidió pararse a descansar durante una hora. Después regresó a su casa: tardó una hora en llegar y no hizo ninguna parada en el camino.

TEMA 9. Funciones lineales y cuadráticas

1.Función de proporcionalidad y=mx

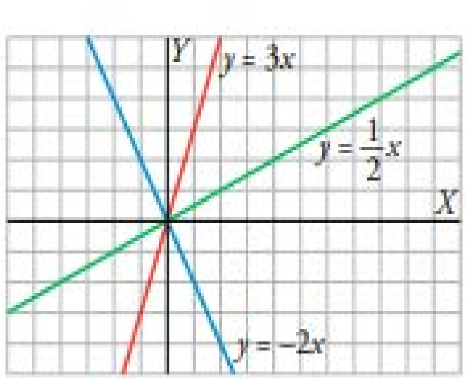
Se llama **función de proporcionalidad directa** o, simplemente **función lineal**, a cualquier función que relacione dos magnitudes directamente proporcionales (x, y).

Una función de proporcionalidad directa o función lineal se expresa de la forma y= mx siendo **m** un número cualquiera, que recibe el nombre de <u>pendiente</u>. Cuanto mayor sea **m**, más inclinada estará la recta respecto del eje X.

La representación gráfica de estas funciones es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

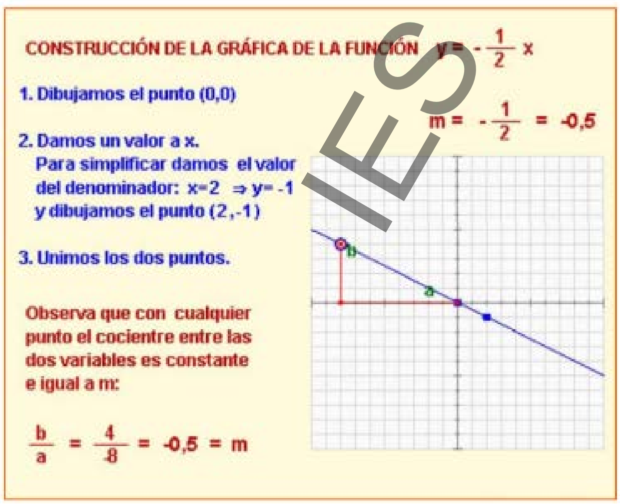
Ejemplo:

Rectas con pendientes 1/2, 3 y -2:



1.1. Representación gráfica de la función a partir de la ecuación

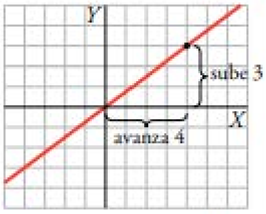
Como y=mx, la gráfica de todas las funciones lineales pasa por el punto (0,0). Para dibujar la gráfica basta con obtener las coordenadas de otro punto, dando un valor arbitrario a la "**x**" y unir ese punto con el origen de coordenadas (0,0). Si x=1, entonces y=m, por tanto "**m**" representa la variación de la "**y**" por cada unidad de "**x**".



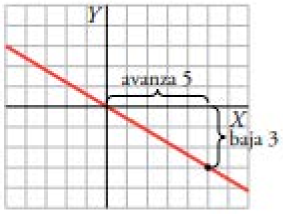
1.2. Ecuación a partir de la gráfica.

Si es una recta que pasa por el origen de coordenadas sabemos que es una función de proporcionalidad por lo que solo tendremos que averiguar su pendiente. Como la "**m**" es la variación de la "**y**" por cada unidad de la "**x**", nos fijaremos en la gráfica para obtenerla.

Ejemplo:



Pendiente $m = \frac{3}{4}$



Pendiente $m = -\frac{3}{5}$

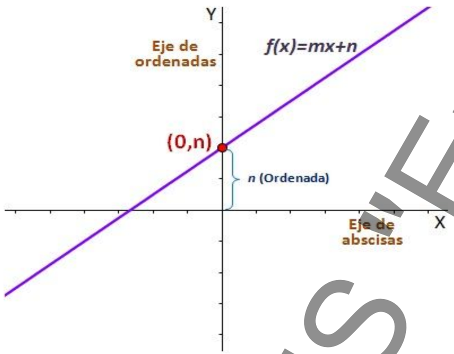
2. Función y=mx+n

Una **función afín** se expresa de la forma: $y = mx + n$, siendo "**m**" y "**n**" dos números cualesquiera, donde "**m**" es la pendiente de la recta y "**n**" es la ordenada en el origen.

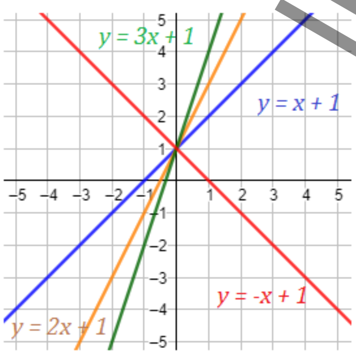
Si $m > 0$, la recta es creciente. Si $m < 0$, la recta es decreciente.

La representación gráfica de estas funciones es una recta que no pasa por el origen de coordenadas, sino por el punto (0, n).

Las funciones de proporcionalidad directa o funciones lineales son un caso particular de las funciones afines cuando n = 0.



Ejemplo: rectas con pendientes -1, 1, 2 y 3, todas las rectas tienen n= 1.

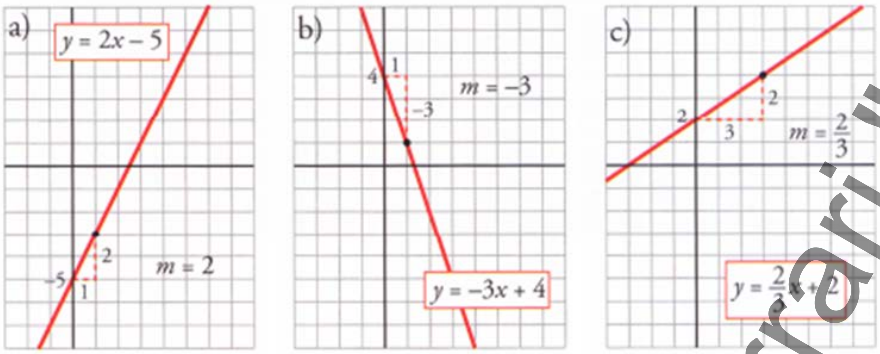


2.1. Ecuación a partir de la gráfica

Observando la gráfica obtenemos la "**m**" y la "**n**" (ordenada en el origen) y como sabemos que si la gráfica es una recta que no pasa por el punto (0,0) su ecuación es y=mx+n, solo tenemos que sustituir la "**m**" y "**n**" por sus valores correspondientes.

Ejemplo:

$y = 2x - 5$ $\qquad$ $y = -3x + 4$ $\qquad$ $y = \dfrac{2}{3}x + 2$



2.2. Representación de una recta a partir de la ecuación (ejemplo y= x+1)

Hacemos una tabla de valores:

Si x= 1→ y =1+1=2 Punto (1,2)

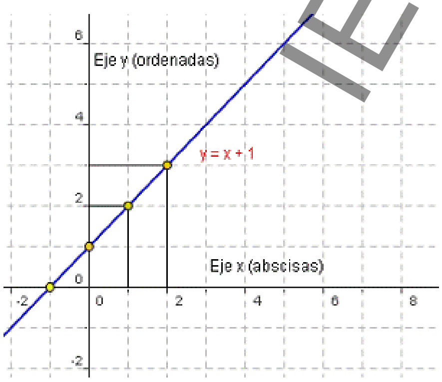
Si x=0 → y= 0+1=1 Punto (0,1)

Si x=-1→ y=-1+1=0 Punto (-1,0)

x	-1	0	1	2
y	0	1	2	3

Representamos los valores obtenidos en un gráfico:

Si quiero representar el punto (1,2) el primer valor es siempre el de "**x**" y el segundo el de "**y**". Buscamos la coordenada 1 en el eje "**x**" y después subimos por esa línea hasta encontrarnos con el valor de "**y**". El punto (1,2) será el punto donde se junten las dos líneas. Representamos todos los puntos de la tabla, los unimos y ya tenemos la recta.

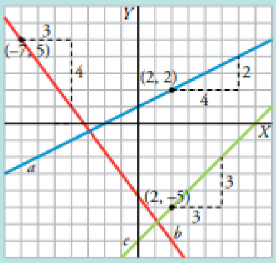


3. Recta de la que se conoce un punto y la pendiente.

Si de la recta conocemos un punto (x_0, y_0) y la pendiente (“**m**”) su ecuación será la siguiente:

$y = y_0 + m(x - x_0)$ Ecuación punto-pendiente.

Ejemplos:

1. ***Escribir las ecuaciones de las rectas siguientes dadas por un punto y su pendiente:*** ***a)*** $P(3, 7)$ $m = 4$ ***b)*** $P(-2, 5)$ $m = -\frac{2}{3}$ ***c)*** $P(4, -1)$ $m = 1{,}2$ ***d)*** $P(-3, 0)$ $m = \frac{1}{5}$	Obtenemos, para cada una de las rectas, su ecuación punto-pendiente. a) ECUACIÓN: $y = 7 + 4(x - 3)$ Es decir, $y = 4x - 5$ b) ECUACIÓN: $y = 5 - \frac{2}{3}(x + 2)$ Es decir, $y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$ c) ECUACIÓN: $y = -1 + 1{,}2(x - 4)$ Es decir, $y = 1{,}2x - 5{,}8$ d) ECUACIÓN: $y = \frac{1}{5}(x + 3)$ Es decir, $y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$
2. ***Escribir la ecuación de las rectas a, b y c.*** 	a) Pasa por (2, 2). Su pendiente es $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. ECUACIÓN: $y = 2 + \frac{1}{2}(x - 2)$ b) Pasa por (−7, 5). Su pendiente es $-\frac{4}{3}$. ECUACIÓN: $y = 5 - \frac{4}{3}(x + 7)$ c) Pasa por (2, −5). Su pendiente es $\frac{3}{3} = 1$. ECUACIÓN: $y = -5 + (x - 2)$

4. Recta que pasa por dos puntos (x_1, y_1) (x_2, y_2)

Lo primero será obtener la pendiente de la siguiente forma:

$$m = \frac{\text{variación de la } y}{\text{variación de la } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Luego sustituimos el punto y la pendiente en la ecuación punto-pendiente.

Ejemplo:

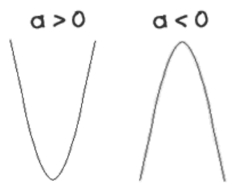
Obtener la ecuación de la recta que pasa por P y Q: ***a)*** $P(5, 3)$, $Q(-3, 4)$ ***b)*** $P(-3, 5)$, $Q(-2, 3)$	a) $m = \frac{4-3}{-3-5} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$ b) $m = \frac{3-5}{-2-(-3)} = \frac{-2}{1} = -2$	ECUACIÓN: $y = 3 - \frac{1}{8}(x - 5)$ ECUACIÓN: $y = 5 - 2(x + 3)$

5. *Parábolas y funciones cuadráticas*

Una función cuadrática es aquella de la forma $y= ax^2+bx+c$. Si la representamos gráficamente, obtenemos una parábola.

ORIENTACIÓN:

Para saber si una parábola está abierta hacia arriba o hacia abajo, tan solo hay que mirar el término ax^2. Si a es positivo, está abierta hacia arriba, y si es negativo, hacia abajo.



VÉRTICE:

Es importante calcularlo, ya que es el máximo o el mínimo de la parábola, dependiendo de su orientación. Si queremos dibujarla, es un punto clave. Calcularlo es sencillo, ya que la coordenada "**x**" es -b/2a. Para hallar la coordenada "**y**", basta con sustituir en la fórmula el valor de la "**x**".

Por ejemplo, en la parábola $y = x^2 - 4x + 5$, el vértice estará en: $p=-b/2a=4/2=2$ y $f(2)=2^2-4.2+5=1$ por lo que $V=(2,1)$

EJE DE SIMETRÍA:

El eje de simetría siempre es vertical, y pasa por el vértice, luego su ecuación será: $x = -b/2a$.

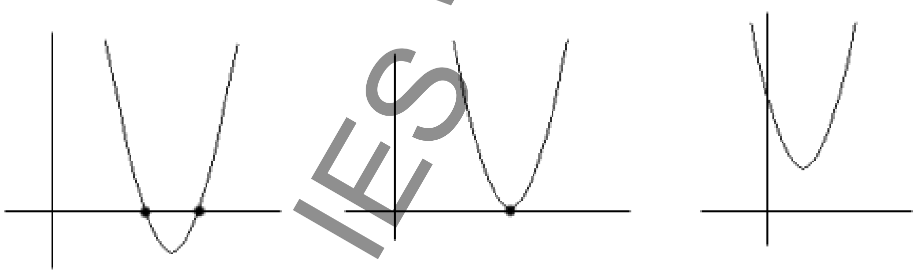
En el **ejemplo** anterior, el eje de simetría tiene por ecuación: $x = 2$

PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES:

En el eje Y la coordenada "**x**" es cero, luego, sustituyendo este valor en la fórmula, hallamos la "**y**":

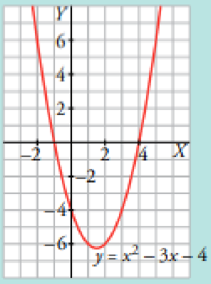
$y = a·0^2 + b·0 + c = c$, por lo que el punto de corte es el (0, c)

En el eje X, es la "**y**" la que vale cero. Sustituimos en la fórmula y hallamos los valores de "**x**": $0 = ax^2 + bx + c$. Obtenemos una ecuación de segundo grado, que puede tener dos soluciones, una o ninguna, es decir, la parábola puede cortar al eje X en dos puntos, en uno o en ninguno:



Ejemplo:

Representar $y = x^2 - 3x - 4$.



1.° Obtención del vértice:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Abscisa: } p = \dfrac{-(-3)}{2\cdot 1} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5 \\ \text{Ordenada: } f(1{,}5) = (1{,}5)^2 - 3\cdot 1{,}5 - 4 = -6{,}25\end{array}\right\} \text{El vértice es } (1{,}5;\ -6{,}25).$$

2.° Obtención de puntos próximos al vértice:

x	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	6	0	–4	–6	–6	–4	0	6

3.° Puntos de corte con los ejes:

- Cortes con el eje X:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 4$$

- Corte con el eje Y: $(0, -4)$

(Esta información ya la teníamos en la tabla anterior)

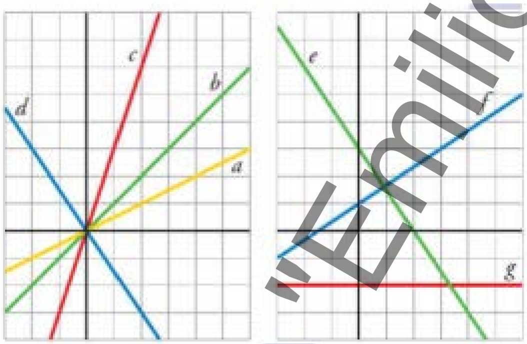
4.° Puedes ver la representación a la izquierda.

EJERCICIOS:

1. Señala si cada una de las siguientes expresiones corresponde a una función lineal o a una función afín y halla la pendiente y la ordenada en el origen de cada una:

a) y= 2x+3 b) y=-x-2 c) 3x-2y=0 d) -4x+2y-5=0 e) x=1-5y

2. Escribe las ecuaciones de las siguientes rectas:



3. ¿Qué relación existe entre las gráficas de las funciones: f(x)=3x y g(x)= 3x+5? ¿y entre f(x)= 5x+1 y g(x)=5x?

4. a) Hallar la ecuación de la recta con pendiente -3 y que pasa por el punto (3,−2)

b) Determine el punto de la recta que tiene de coordenada y igual a −5.

c) Determine el punto de la recta que tiene coordenada x igual a 2.

5. Halla la ecuación de las siguientes rectas.

a) Tiene pendiente 3 y ordenada en el origen -7.

b) Es paralela a la recta de ecuación x = 5 y pasa por el punto (-2, 8).

c) Tiene pendiente 5 y pasa por el punto (-1, -2).

d) Pasa por los puntos (2, 3) y (-1, 6).

e) Corta al eje Y en el punto -3 y pasa por el punto (-2, 1).

f) Pasa por el punto (2, -1) y es paralela a la recta de ecuación y = 6x + 9.

g) Es paralela al eje X y pasa por el punto (-3, 2).

6. De la función afín y= a x +b sabemos que su ordenada en el origen es –6 y que su gráfica pasa por el punto P (8,10). Halla la expresión matemática de esta función y represéntala en unos ejes de coordenadas.
7. Calcula la expresión de la función lineal o afín que pasa por los puntos y represéntalas en unos ejes coordenados.
   a) P (-2,1) ; Q(3,11) b) R(3,0) ; P(-2,1) c) S(2,0) ; T(-1,2) d) M(2,3) ; N(-2,4)
8. Halla los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:
   a) y=x-2 b) y=2x-6 c) y=3x+12 d) 6x-y+6=0 e) 3x+4y-24=0
9. Las funciones f(x)=2x+9 y g(x)=a x+ b representan rectas paralelas y la segunda pasa por el punto P (-3,0). Halla a y b.
10. Halla los coeficientes a y b de la ecuación de la recta y=a x + b sabiendo que dicha recta es paralela a la recta $y = \frac{2x-1}{2}$ y que corta al eje Y en el mismo punto que la recta y = -2 x+ 5.
11. Un técnico de reparaciones de electrodomésticos cobra 25 € por la visita, más 20 € por cada hora de trabajo. a) Escribe la ecuación de la recta que nos da el dinero que debemos pagar en total, "**y**", en función del tiempo que esté trabajando, "**x**". b) Represéntala gráficamente. c) ¿Cuánto pagaríamos si hubiera estado 3 horas?
12. En una agencia de alquiler de coches cobran, para un modelo concreto, 50 € fijos más 0,20 € por cada kilómetro recorrido. En otra agencia, por alquilar el mismo modelo, cobran 20 € fijos más 0,30 € por cada kilómetro recorrido. a) Obtén, en cada uno de los dos casos, la expresión analítica de la función que nos da el gasto total según los kilómetros recorridos. b) Representa, en los mismos ejes, las dos funciones anteriores. (Elige una escala adecuada, tomando los kilómetros de 100 en 100). c) Analiza cuál de las dos opciones es más ventajosa, según los kilómetros que vayamos a recorrer.
13. Represente las siguientes parábolas:
   a) $y= x^2-4x+3$
   b) $y= -x^2-6x+27$
   c) $y=x^2+6x+10$
   d) $y=2x^2-6$
   e) $y=x^2-5x+6$
   f) $y=x^2-5x$
   g) $y=2x^2-10x$
14. La ecuación del espacio recorrido por un móvil es $S= 2t^2+3t+5$, donde "**s**" se expresa en metros y "**t**" en segundos.
    a) ¿Qué longitud ha recorrido el móvil al cabo de 5 segundos de iniciar el movimiento?
    b) ¿Cuál es la longitud recorrida durante el quinto segundo?
    c) ¿Cuánto tiempo ha transcurrido cuando ha recorrido 157 metros desde el inicio?
15. Una función cuadrática tiene una expresión de la forma $y= x^2+ax+a$ y pasa por el punto (1, 9). Calcular el valor de "**a**".

TEMA 10. Problemas métricos en el plano

En este tema aparecen dos conceptos expuestos en cursos anteriores:

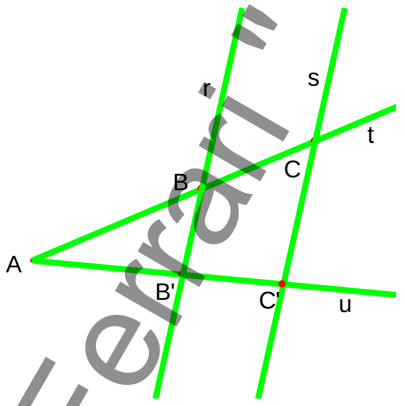
- El teorema de Tales
- El teorema de Pitágoras

1. Teorema de Tales

Teorema de Tales.

Sean r y s dos rectas paralelas y t y u otras dos rectas, secantes a r y s que se cortan en un punto A, entonces los segmentos que determinan en ellas son semejantes:

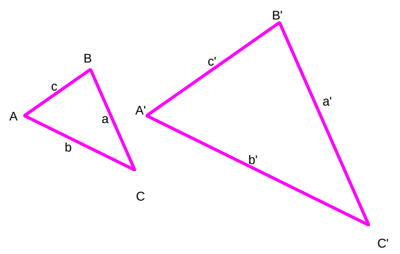
$$\frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}=\frac{BB'}{CC'}$$



Dentro del estudio de la semejanza un apartado importante es la semejanza de triángulos, debido a que cualquier polígono se puede descomponer en triángulos.

2. Semejanza de triángulos

Los triángulos ABC y A’B’C’ son semejantes si:

1. Sus ángulos respectivos son iguales. $\widehat{A}=\widehat{A}';\widehat{B}=\widehat{B}';\widehat{C}=\widehat{C}'$ 2. Sus lados son proporcionales. $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=r$ A r se le denomina razón de semejanza.	

Sin embargo, no es necesario comprobar que se cumplen todas las condiciones de semejanza de triángulos para que estos sean semejantes. Vamos a explicar los diferentes criterios de semejanza.

Dos triángulos ABC y A’B’C’ son semejantes si:

Criterio 1. Sus lados son proporcionales. $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

Criterio 2. Si dos de sus ángulos son iguales. $\hat{A}=\widehat{A'}$ y $\hat{B}=\widehat{B'}$

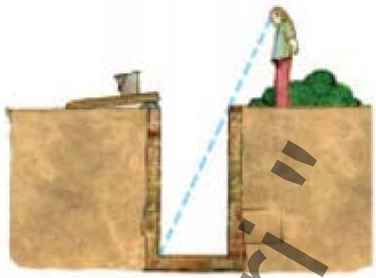
Criterio 3. Tienen un ángulo igual y los lados que determinan ese ángulo son proporcionales. $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Ejercicio 1.

Los lados de un triángulo miden 8 cm, 12 cm y 5 cm. Halla los lados de un triángulo semejante al anterior cuya razón de semejanza sea 3/4.

Ejercicio 2.

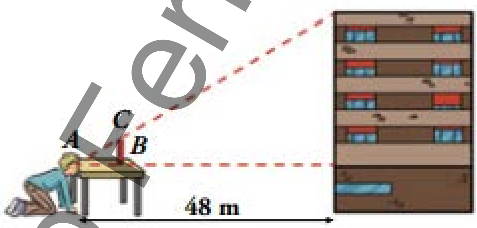
¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 2 m y alejándote 1,2 m del borde, desde una altura de 1,8 m, ves que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?



Ejercicio 3.

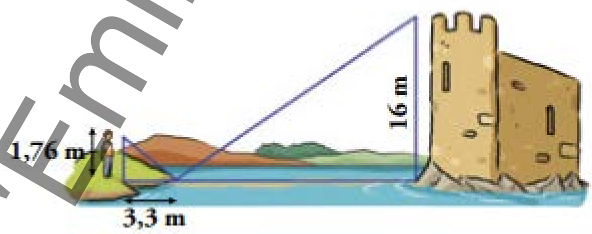
Calcula la altura del edificio sabiendo q

- La mesa tiene 1 m de altura.
- $\overline{AB} = 80\,cm \ y \ \overline{BC} = 52\,cm$



Ejercicio 4.

Calcula la distancia de Marcos a la base de la torre a partir de los datos del dibujo



Ejercicio 5.

La razón entre los perímetros de dos triángulos semejantes es 1/3. Calcula las longitudes de los lados de uno de ellos, sabiendo que las del mayor miden respectivamente 9 cm, 12 cm y 18 cm.

Ejercicio 6.

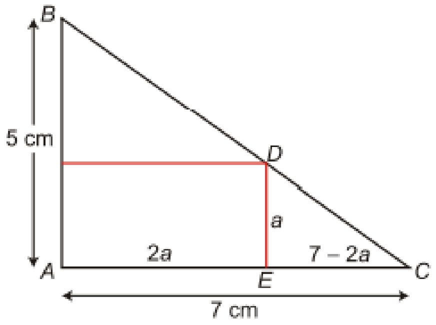
En un triángulo rectángulo las medidas de los lados son 3 cm, 4 cm y 5 cm respectivamente. ¿Cuál debe ser el perímetro de un triángulo mayor semejante al anterior cuya razón de semejanza es 3?

Ejercicio 7.

Las áreas de dos triángulos isósceles semejantes son $48\,m^2 \ y \, 108\,m^2$. Si el lado desigual del primer triángulo es $12\,m$, ¿cuál es el perímetro del segundo?

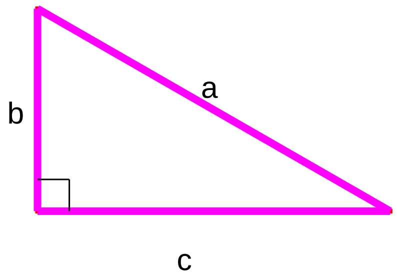
Ejercicio 8.

En un triángulo rectángulo se inscribe un rectángulo cuya base es dos veces su altura. Los catetos del triángulo miden 5 cm y 7 cm respectivamente. Calcula las dimensiones del rectángulo.



3. *Teorema de Pitágoras. Aplicaciones.*

En todo triángulo rectángulo se verifica que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



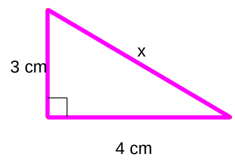
$$a^2 = b^2 + c^2$$

A partir de este teorema se pueden resolver una infinidad de problemas. Planteamos los siguientes:

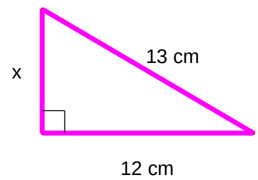
Ejercicio 9.

Calcula el lado desconocido en los siguientes triángulos rectángulos.

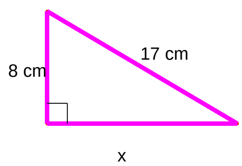
a)



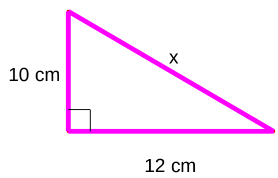
b)



c)



d)



Ejercicio 10.

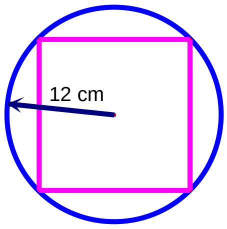
Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 cm.

Ejercicio 11.

Calcula el lado de un rombo sabiendo que sus diagonales miden 20 cm y 12 cm

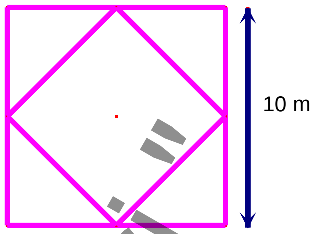
Ejercicio 12.

Calcula el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 12 cm



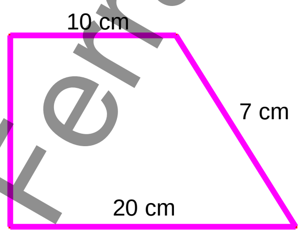
Ejercicio 13.

Calcula el perímetro y el área del cuadrado interior que se forma a partir de los puntos medios del cuadrado de lado 10 m.



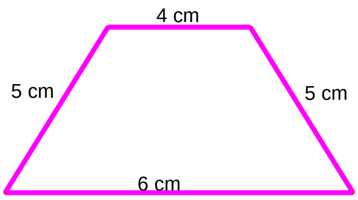
Ejercicio 14.

Halla la altura de un trapecio rectángulo de bases 10 y 20 centímetros y lado desigual de 7 centímetros



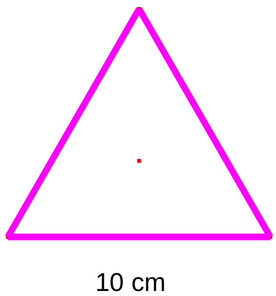
Ejercicio 15.

Halla la altura de un trapecio isósceles de bases 4 y 6 centímetros, y lados iguales de 5 centímetros



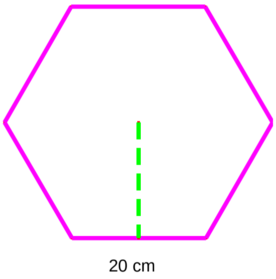
Ejercicio 16.

Calcula el área de un triángulo equilátero de 10 cm de lado.



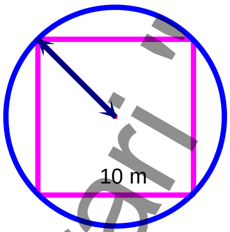
Ejercicio 17.

Calcula la apotema de un hexágono regular de 20 cm de lado.



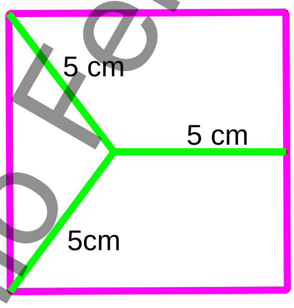
Ejercicio 18.

Calcula el radio de la circunferencia, sabiendo que el lado del cuadrado inscrito en ella mide 10 m



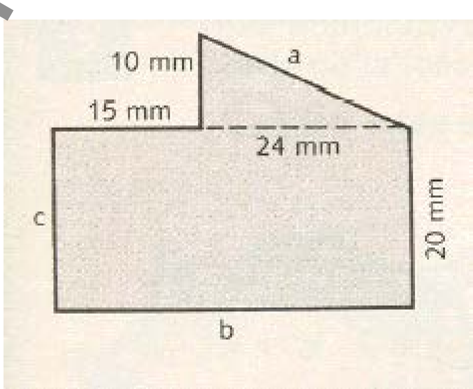
Ejercicio 19.

Calcula el área del siguiente cuadrado



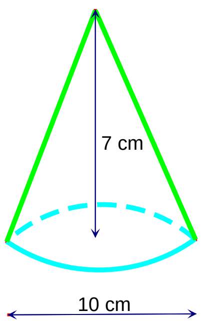
Ejercicio 20.

Calcula el área de la siguiente figura.



Ejercicio 21.

Calcula la generatriz de un cono cuya altura mide 7 cm y diagonal de la base 10 cm.



TEMA 11. Cuerpos geométricos

1. Áreas de los cuerpos geométricos

En los cuerpos geométricos, excepto en la esfera, se distinguen tres tipos de áreas:

a) Área Lateral: es la suma de las áreas de cada cara. Se calcula el área de una cara y se multiplica por el número de caras que haya.

$A_L = n \cdot A_C$ (A_L : Área Lateral; n: números de caras; A_C: Área de una cara).

b) Área de las Bases: es la suma de las áreas de cada base. Se calcula el área de una base y, ¡OJO!, en los prismas y cilindros se multiplica por dos.

A_B= Área del polígono de una de las bases.

c) Área Total: es la suma del área lateral y del área de las bases.

$A_T = A_L + 2A_B$ (en los prismas y cilindros)

$A_T = A_L + A_B$ (en las pirámides y conos)

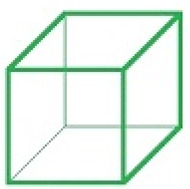
1.1. Poliedros regulares

Los poliedros regulares tienen fórmulas específicas para calcular su área en función de la arista. [Nota: Al hablar de área en los poliedros regulares nos referimos a la suma de las áreas de cada cara, o sea, al área total]

Hexaedro o cubo

Para calcular el área del hexaedro o cubo bastará con hallar el área de uno de los cuadrados de las caras y multiplicar por 6, que son las caras que tiene un cubo. Y como el área de una cara (A_C) es la arista del hexaedro al cuadrado, el área del cubo será: $A = 6a^2$

Ejemplo: Calcula el área de un cubo de 4 cm de arista.



$A = 6A_C \qquad A_C = a^2$

$A = 6a^2 \qquad A_C = 4^2$

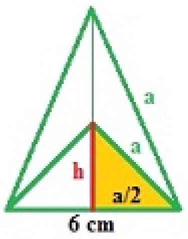
$A = 6 \cdot 16 \qquad A_C = 16\ cm^2$

$A = 96\ cm^2$

Tetraedro

Para calcular el área del tetraedro (A_T) bastará con hallar el área de uno de los triángulos equiláteros (A_t) que forman las caras y multiplicar por 4, que son las caras que tiene un tetraedro. Lógicamente, para saber el área de uno de los triángulos que forman las caras hay que calcular la altura en función de la arista del tetraedro, utilizando el teorema de Pitágoras.

Ejemplo: Calcula el área de un tetraedro de 6 cm de arista.



$$A_T = 4A_t$$
$$A_T = 4 \bullet \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$
$$A_T = a^2\sqrt{3}$$
$$A_T = 6^2\sqrt{3}$$
$$A_T = 36\sqrt{3}$$

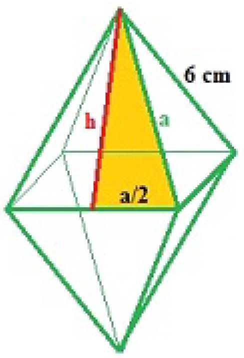
$$A_t = \frac{a \bullet h}{2}$$
$$A_t = \frac{a}{2} \bullet \frac{a}{2}\sqrt{3}$$
$$A_t = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$
$$h^2 = \frac{4a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$$
$$h^2 = \frac{3a^2}{4}$$
$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

Octaedro

Para calcular el área del octaedro (A_O) bastará con hallar el área de uno de los triángulos equiláteros (A_t) que forman las caras y multiplicar por 8, que son las caras que tiene un octaedro. Lógicamente, para saber el área de uno de los triángulos que forman las caras hay que calcular la altura en función de la arista del octaedro, utilizando el teorema de Pitágoras.

Ejemplo: Calcula el área de un octaedro de 6 cm de arista.



$$A_O = 8A_t$$
$$A_O = 8 \bullet \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$
$$A_O = 2a^2\sqrt{3}$$
$$A_O = 2 \cdot 6^2\sqrt{3}$$
$$A_O = 2 \cdot 36\sqrt{3}$$
$$A_O = 72\sqrt{3}$$

$$A_t = \frac{a \bullet h}{2}$$
$$A_t = \frac{a}{2} \bullet \frac{a}{2}\sqrt{3}$$
$$A_t = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

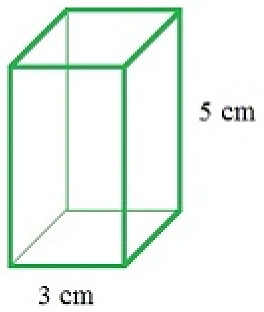
$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$
$$h^2 = \frac{4a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$$
$$h^2 = \frac{3a^2}{4}$$
$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

El área del octaedro es el doble de la del tetraedro (porque tiene el doble de caras). El área del icosaedro es 5 veces la del tetraedro puesto que el icosaedro tiene 20 caras que son triángulos. El área del dodecaedro es un poco más complicada, sólo tienes que saber que el dodecaedro está formado por 12 pentágonos.

1.2. Áreas de prismas

Para calcular el área de un prisma, calcularemos el área de la base (por ser dos polígonos iguales) y el área lateral (formada también por tantos polígonos iguales como lados tenga la base). Y después sumaremos las dos anteriores.

Ejemplo: Calcula el área total de un prisma cuadrangular regular de 3 cm de arista de la base y 5 cm de arista lateral.



$A_T = A_L + 2A_B$ $\quad A_L = n \cdot A_C$ $\quad A_C = b \cdot h$ $\quad A_B = l^2$

$A_T = 60 + 2 \cdot 9$ $\quad A_L = 4 \cdot 15$ $\quad A_C = 3 \cdot 5$ $\quad A_B = 3^2$

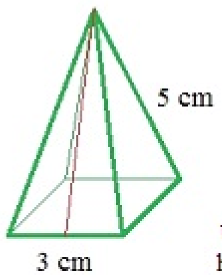
$A_T = 60 + 18$ $\quad A_L = 60 \text{ cm}^2$ $\quad A_C = 15 \text{ cm}^2$ $\quad A_B = 9 \text{ cm}^2$

$A_T = 78 \text{ cm}^2$

1.3. Áreas de las pirámides

Se calculan igual que en los prismas, teniendo en cuenta que las caras laterales son <u>triángulos isósceles</u> y que sólo tienen **<u>una base</u>**.

Ejemplo: Calcula el Área Total de una pirámide cuadrangular regular de 3 cm de arista de la base y 5 cm de arista lateral.



$A_T = A_L + A_B$ $\quad A_L = n \cdot A_C$ $\quad A_C = \frac{b \bullet h}{2}$ $\quad A_B = l^2$

$A_T = 28{,}56 + 2 \cdot 9$ $\quad A_L = 4 \cdot 7{,}14$ $\quad A_C = \frac{3 \bullet 4{,}76}{2}$ $\quad A_B = 3^2$

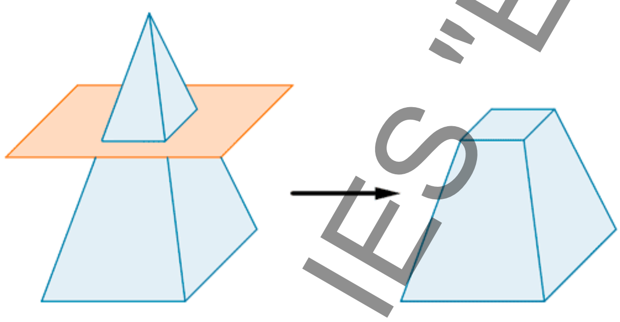
$A_T = 28{,}56 + 18$ $\quad A_L = 28{,}56 \text{ cm}^2$ $\quad A_C = 7{,}14 \text{ cm}^2$ $\quad A_B = 9 \text{ cm}^2$

$A_T = 46{,}56 \text{ cm}^2$

Para calcular la altura (h) del triángulo isósceles de las caras utilizamos el teorema de Pitágoras: $h^2 = 5^2 - 1{,}5^2$ $\quad h^2 = 25 - 2{,}25$

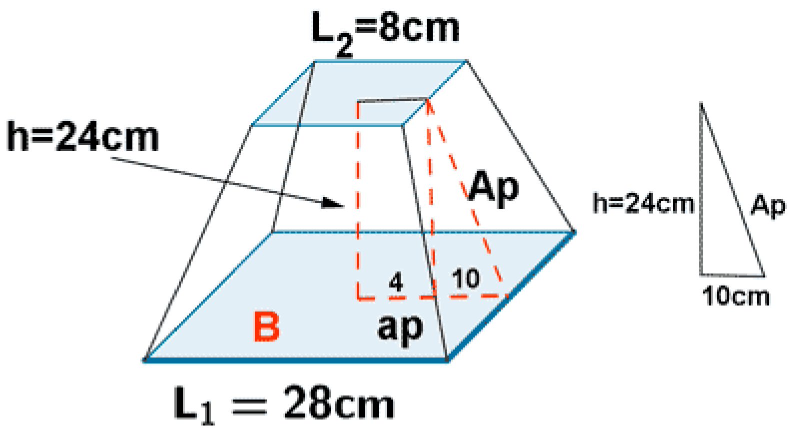
$h^2 = 22{,}75$ $\quad h = \sqrt{22{,}75}$ $\quad h = 4{,}76 \text{ cm}$

1.4. Área del tronco de pirámide



Un tronco de pirámide es la parte de la pirámide comprendida entre la base y una sección paralela a la base. Por lo tanto, para calcular el área calculamos las áreas de las bases y el área lateral será las áreas de los trapecios.

Ejemplo: Halla el área de un tronco de pirámide cuadrada en el que la arista de la base mayor mide 28 cm, la de la base menor 8 cm y la altura 24 cm.



$$Ap = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26 \text{ cm}$$

$$A_L = 4 \cdot \frac{L_1 + L_2}{2} \cdot Ap \quad \Leftrightarrow \quad A_L = 4 \cdot \frac{28+8}{2} \cdot 26 = 1872 \text{ cm}^2$$

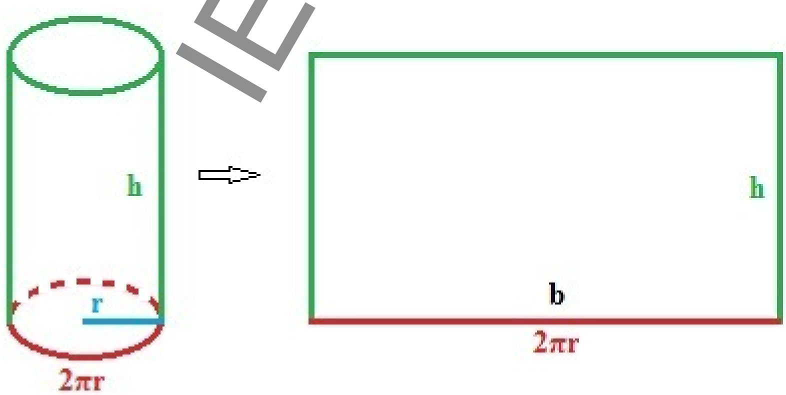
$$A_{B_1} = L_1 \cdot L_1 \quad \Leftrightarrow \quad A_{B_1} = 28 \cdot 28 = 784 \text{ cm}^2$$

$$A_{B_2} = L_2 \cdot L_2 \quad \Leftrightarrow \quad A_{B_2} = 8 \cdot 8 = 64 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_{B_1} + A_{B_2} \quad \Leftrightarrow \quad A_T = 1872 + 784 + 64 = 2720 \text{ cm}^2$$

1.5. Área del cilindro

a) **Área Lateral:** Si desarrollamos (desplegamos) un cilindro, su superficie lateral se convierte en un rectángulo, cuya área es base x altura. Si tenemos en cuenta que la base de este rectángulo es la longitud de la circunferencia de la base del cilindro, el Área Lateral del Cilindro será:

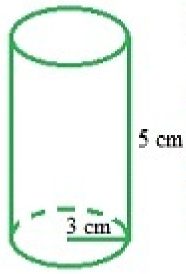


b) **Área de las Bases:** Es el área de uno de los dos círculos de las bases. $A_B = \pi r^2$

c) **Área Total:** Es la suma del área lateral y del área de las dos bases.

$$A_T = A_L + 2A_B$$

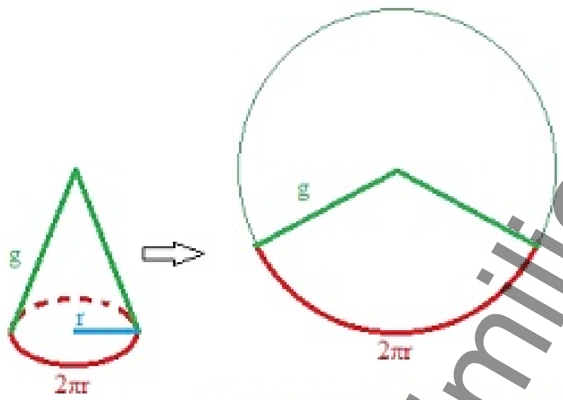
Ejemplo: Calcula el Área Total de un cilindro de 3 cm de radio y 5 cm de altura.



$A_T = A_L + 2A_B$	$A_L = 2\pi rh$	$A_B = \pi r^2$
$A_T = 94{,}2 + 2 \cdot 28{,}26$	$A_L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot 5$	$A_B = 3{,}14 \cdot 3^2$
$A_T = 94{,}2 + 56{,}52$	$A_L = 94{,}2\ cm^2$	$A_B = 28{,}26\ cm^2$
$A_T = 150{,}72\ cm^2$		

1.6. Áreas del cono

a) **Área Lateral:** Es el área del sector circular que se forma al desarrollar (desplegar) el cono.



A_L = Área Sector Circular de radio g

El área del sector, **x**, se calcula por regla de tres, comparando grados y área del círculo grande con grados y área del sector circular:

360º --------- πg^2

nº ------------ x

$x = \dfrac{n^o \pi g^2}{360^o}$. Por lo tanto,

$$A_{Sector} = x = \frac{n^o \pi g^2}{360^o} = \frac{n^o \pi g}{180^o} \cdot \frac{g}{2}$$

(Descomponemos la fracción en un producto de dos fracciones para facilitar la comprensión de lo que sigue)

Calculemos ahora la Longitud, y, del Sector Circular de radio g por regla de tres, comparando grados y longitud de la circunferencia grande con grados y longitud del sector circular.

360º -------- $2\pi g$

nº ------------ y

$L_{Sector} = y = \dfrac{2\pi g n^o}{360^o} = \dfrac{\pi g n^o}{180^o}$. Como puedes observar, esta fracción es uno de los productos obtenidos más arriba al calcular el A_{Sector}. Según esto, tenemos:

$A_{Sector} = L_{Sector} \cdot \dfrac{g}{2}$. Pero L_{Sector} es igual a la Longitud de la circunferencia del cono. Por lo tanto: $A_{Sector} = L_c \cdot \dfrac{g}{2} = 2\pi r \cdot \dfrac{g}{2}$. Y, simplificando, queda:

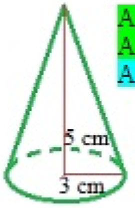
$$A_L = \pi r g$$

b) **Área de la Base**: Es el área del círculo de la base. $A_B = \pi r^2$

c) **Área Total:** Al área lateral se le suma el área de la base.

$$A_T = A_L + A_B$$

Ejemplo: Área Total de un cono de 3 cm de radio y 5 cm de altura.



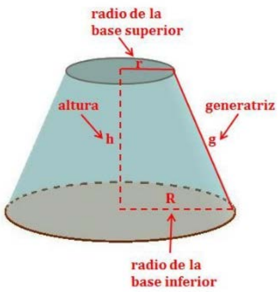
$A_T = A_L + A_B$
$A_T = 54{,}91 + 28{,}26$
$A_T = 83{,}17\ cm^2$

$A_L = \pi r g$
$A_L = 3{,}14 \cdot 3 \cdot 5{,}83$
$A_L = 54{,}91\ cm^2$

$A_B = \pi r^2$
$A_B = 3{,}14 \cdot 3^2$
$A_B = 3{,}14 \cdot 9$
$A_B = 28{,}26\ cm^2$

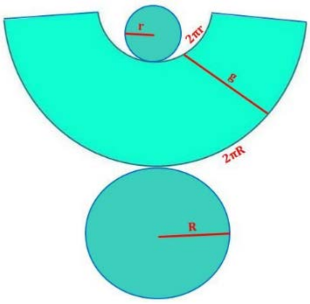
$g^2 = h^2 + r^2$
$g^2 = 5^2 + 3^2$
$g^2 = 25 + 9$
$g^2 = 34$
$g = \sqrt{34}$
$g = 5{,}83\ cm$

1.7. *Área de un tronco de cono*



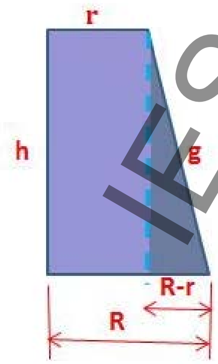
Un tronco de cono es un cuerpo como la figura adjunta, es decir, es un cono que se ha cortado por un plano paralelo a la base. El área de las bases es fácil de calcular pues son círculos.

El área lateral es un poco más complicada, se basa en el área del trapecio. ($A = \frac{B+b}{2} \cdot h$)



$$A_L = \frac{2 \cdot \pi \cdot R + 2 \cdot \pi \cdot r}{2} \cdot g = \pi \cdot (R + r) \cdot g$$

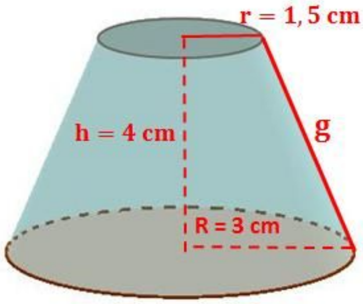
A veces el problema está en que conocemos el radio de las bases y la altura, pero no conocemos la generatriz. Para calcularla podemos utilizar el teorema de Pitágoras, así:



$$g = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$$

Ejemplo:

Hallar el área de un tronco de cono de radio de la base mayor, 3 cm, de radio de la base menor, 1,5 cm y 4 cm de altura.



Solución:

Aplicamos la fórmula del área del tronco de cono, para lo que hallaremos en primer lugar la longitud de la generatriz *g*:

$$g = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$$

$$g = \sqrt{4^2 + (3 - 1{,}5)^2} = \sqrt{16 + 2{,}25} = \sqrt{18{,}25} = 4{,}27 \text{ cm}$$

Ahora aplicamos la fórmula del área total:

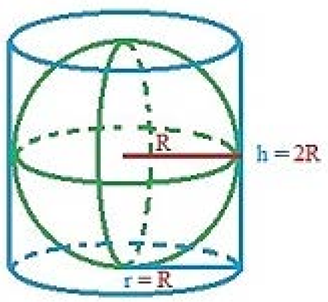
$$\text{Área} = \pi \cdot [R^2 + r^2 + (R + r) \cdot g] \rightarrow$$

$$\text{Área} = \pi \cdot [3^2 + 1{,}5^2 + (3 + 1{,}5) \cdot 4{,}27] \rightarrow$$

$$\text{Área} = 30{,}47 \cdot \pi = 95{,}74 \text{ cm}^2$$

1.8. Área de la esfera

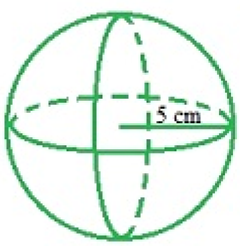
La superficie de una esfera es igual a la del área lateral del cilindro circunscrito a ella (el radio, r, de la base de este cilindro es igual al radio, R, de la esfera y la altura, h, del cilindro es igual al diámetro, 2R, de la esfera). El área lateral de este cilindro será $A_L = 2\pi Rh = 2\pi R \cdot 2R$, con lo que el área de la esfera, igual al área lateral del cilindro circunscrito, será:



$$A = 4\pi R^2$$

El área de la esfera es única, ni hay áreas laterales ni área de la base.

Ejemplo: Calcula el área de una esfera de 5 cm de radio.



$$A = 4\pi R^2$$

$$A = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 5^2$$

$$A = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 25$$

$$\mathbf{A = 314\ cm^2}$$

2. Medida del volumen de los cuerpos

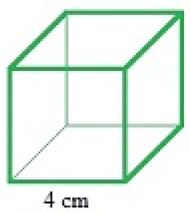
En general, el volumen de los cuerpos geométricos se calcula multiplicando el área de la base por la altura del cuerpo en cuestión (este cálculo se complica un poco en las pirámides, conos y esferas).

2.1 Volumen del cubo

El volumen del cubo es área de la base por la altura. Como la base es un cuadrado, su área es lado al cuadrado (l^2) o arista al cuadrado (a^2) y multiplicado por la altura, que es igual a la arista, obtenemos que la fórmula del volumen del cubo es:

$V = a^3$

Ejemplo: Calcula el volumen de un cubo de 4 cm de arista.



$V = a^3$

$V = 4^3$

$V = 64\ cm^3$

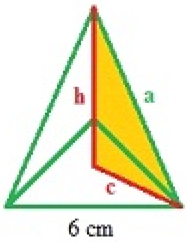
2.2. Volumen del tetraedro

Si consideramos el tetraedro como una pirámide, su volumen será igual a un tercio de la base por la altura. El área de la base (At) es, como hemos visto más arriba, el área del triángulo equilátero de una de sus caras en función de la arista: $A_t = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$. La altura del tetraedro (h_T) es, como veremos en el ejemplo de aqui abajo, $h_T = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. De aqui obtenemos que el volumen del tetraedro es: V = $\frac{1}{3} \bullet \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \bullet a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Realizando las operaciones indicadas llegamos a la fórmula del volumen del tetraedro:

$$\boxed{V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}}$$

Ejemplo: Calcula el volumen de un tetraedro de 6 cm de arista.

[Para hallar la altura del tetraedro utilizamos el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo formado por hca. Observa que la altura del tetraedro va justo al baricentro del triángulo equilátero de la base, que, como sabrás, coincide con el ortocentro, punto donde se juntan las alturas, como ocurre en todos los triángulos equiláteros. Por eso el cateto c es $\frac{2}{3}$ de la altura del triángulo (la altura coincide con la mediana en los triángulos equiláteros y la distancia desde el baricentro al vértice es $\frac{2}{3}$ de la mediana). La altura del triángulo equilátero en función de la arista ya hemos visto más arriba, al hablar del área del tetraedro, que es $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Por lo tanto, el cateto c es $c = \frac{2}{3} \bullet \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$].



$$V = A_B \cdot h$$
$$V = 9\sqrt{3} \bullet a\sqrt{\frac{2}{3}}$$
$$V = 9 \bullet 6\sqrt{3 \bullet \frac{2}{3}}$$
$$V = 54\sqrt{2}$$

$$A_t = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$
$$A_t = \frac{6^2}{4}\sqrt{3}$$
$$A_t = \frac{36}{4}\sqrt{3}$$
$$A_t = 9\sqrt{3}$$

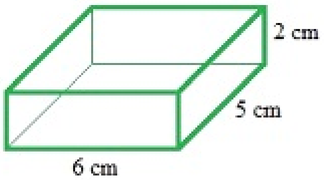
$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2$$
$$h^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9}$$
$$h^2 = \frac{3a^2 - a^2}{3}$$
$$h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

2.3. Volumen del ortoedro

El volumen del ortoedro es área de la base por la altura. Como la base es un rectángulo, su área es largo por ancho (l · a) y multiplicado por la altura (h) se obtiene la fórmula del volumen del ortoedro:

$V = l \cdot a \cdot h$

Ejemplo: Calcula el volumen de un ortoedro de 6 cm de largo, 5 cm de ancho y 2 cm de alto.



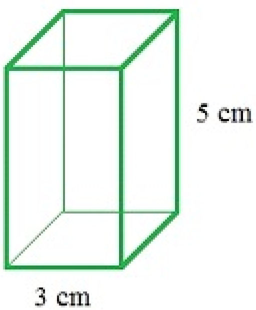
$$V = l \cdot a \cdot h$$
$$V = 6 \cdot 5 \cdot 2$$
$$V = 60\ cm^3$$

2.4. Volumen del prisma

El volumen del prisma es igual al área de la base por la altura:

$$V = A_B \cdot h$$

Ejemplo: Calcula el volumen de un prisma cuadrangular regular de 3 cm de arista de la base y 5 cm de arista lateral.



$$V = A_B \cdot h$$
$$V = 9 \cdot 5$$
$$V = 45\ cm^3$$

$$A_B = l^2$$
$$A_B = 3^2$$
$$A_B = 9\ cm^2$$

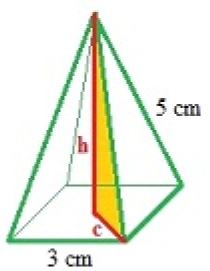
2.5. *Volumen de la pirámide*

Si se dispone de un recipiente con forma de pirámide que tenga la misma base y altura que otro recipiente con forma de prisma, se puede comprobar que el volumen de la pirámide es un tercio del volumen del prisma, porque, si llenamos la pirámide de agua y la vertemos en el prisma, necesitaremos tres pirámides para llenar el prisma. Por lo tanto, si el volumen del prisma es área de la base por la altura, el volumen de la pirámide será un tercio del área de la base por la altura.

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{A_B \cdot h}}{\mathbf{3}}$$

Ejemplo: Calcula el volumen de una pirámide cuadrangular regular de 3 cm de arista de la base y 5 cm de arista lateral.

Para calcular la altura de la pirámide aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo formado por la altura (h), la semidiagonal de la base (c) y la arista lateral (a). Primero hallaremos la diagonal (d) del cuadrado en función del lado (l) del mismo



$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot h \qquad A_B = l^2 \qquad h^2 = a^2 - c^2$$

$$V = \frac{1}{3} \bullet 9 \bullet \sqrt{\frac{41}{2}} \qquad A_B = 3^2 \qquad h^2 = 5^2 - \frac{3^2}{2}$$

$$V = 3 \cdot 4{,}52 \qquad A_B = 9\ \text{cm}^2 \qquad h^2 = \frac{41}{2}$$

$$V = 13{,}56\ \text{cm}^3 \qquad h = \sqrt{\frac{41}{2}}$$

[Cálculo de c^2: primero calculamos d: $d^2 = l^2 + l^2$; $d^2 = 2l^2$; $d = l\sqrt{2}$

$c = \frac{d}{2}$; $c = \frac{l\sqrt{2}}{2}$; $c^2 = \frac{l^2}{2}$]

2.6. *Volumen del cilindro*

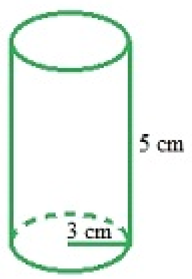
El volumen del cilindro es igual al área de la base por la altura:

$$V = A_B \cdot h$$

Como la base del cilindro siempre es un círculo y el área del círculo es πr^2 también podemos escribir el volumen del cilindro con la siguiente fórmula:

$$V = \pi r^2 h$$

Ejemplo: Calcula el volumen de un cilindro de 3 cm de radio y 5 cm de altura.



$$\mathbf{V = \pi r^2 h}$$

$$V = 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$V = 3{,}14 \cdot 9 \cdot 5$$

$$\mathbf{V = 141{,}3\ cm^3}$$

2.7. Volumen del cono

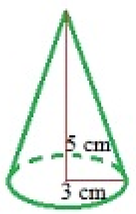
Si se dispone de un recipiente con forma de cono que tenga la misma base y la misma altura que otro recipiente con forma de cilindro, se puede comprobar que el volumen del cono es un tercio del volumen del cilindro, porque, si llenamos el cono de agua y la vertemos en el cilindro, necesitaremos tres conos para llenar el cilindro. Por lo tanto, si el volumen del cilindro es área de la base por la altura, el volumen del cono será un tercio del área de la base por la altura.

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot h$$

Como la base del cono siempre es un círculo y el área del círculo es πr^2 también podemos escribir el volumen del cono con la siguiente fórmula:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

Ejemplo: Calcula el volumen de un cono de 3 cm de radio de la base y 5 cm de altura.



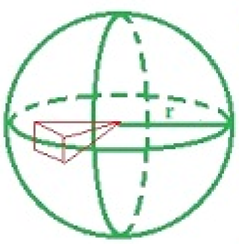
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$V = 47{,}1 \text{ cm}^3$$

2.8. Volumen de la esfera

Si construimos algo parecido a una pirámide con vértice en el centro de la esfera y base un trozo de la superficie esférica, veremos que esta especie de pirámide tiene como altura el radio de la esfera. Cuanto más pequeña sea la base de esta especie de pirámide más se parecerá a una pirámide (porque la base dejará de ser curva y tenderá a ser plana). Nos podemos imaginar el volumen de la esfera como la suma de los volúmenes de todas las pirámides que podamos construir dentro de ella. Así, el volumen de la esfera será:



$$V = \frac{1}{3} S_1 \cdot r + \frac{1}{3} S_2 \cdot r + \frac{1}{3} S_3 \cdot r + \ldots$$

(siendo $S_1, S_2, S_3 \ldots$ las areas de las bases de las pirámides)

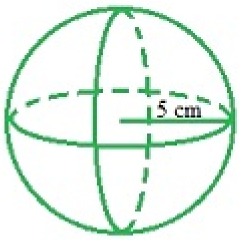
Si sacamos factor común, nos queda:

$$V = \frac{r}{3}(S_1 + S_2 + S_3 + \ldots)$$

(siendo $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots$ el area de la esfera $= 4\pi r^2$)

$$V = \frac{r}{3} \cdot 4\pi r^2 \qquad V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

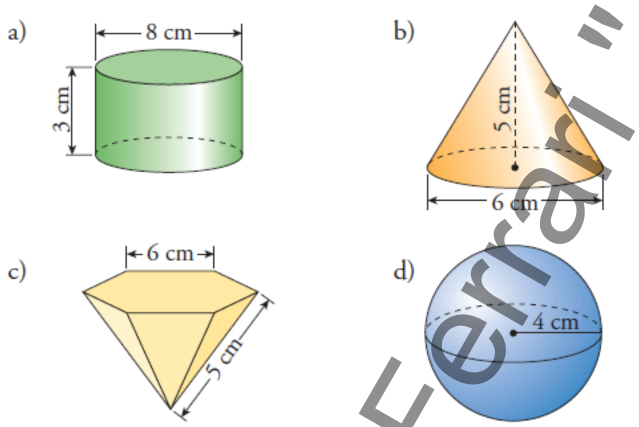
Ejemplo: Calcula el volumen de una esfera de 5 cm de radio.



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$V = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 5^3$$
$$V = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 125$$
$$V = 523{,}33\ cm^3$$

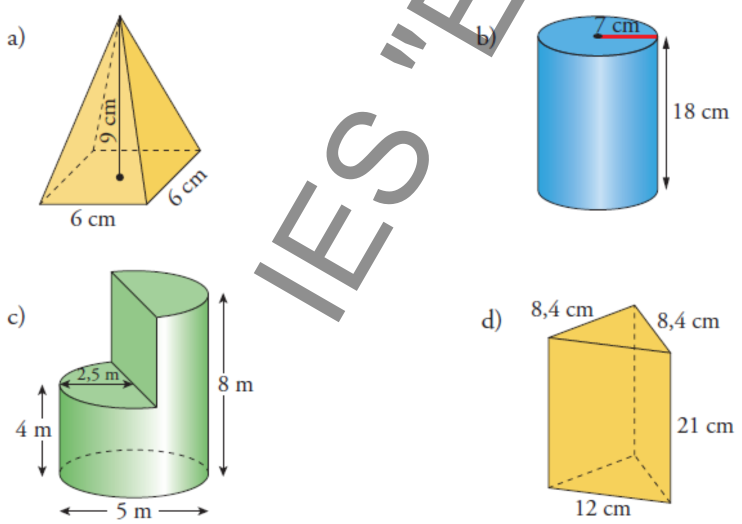
EJERCICIOS:

1. Calcula la superficie total de cada cuerpo:



2. Dibuja los siguientes cuerpos geométricos y calcula su área:
   a) Prisma de altura 20 cm y cuya base es un rombo de diagonales 18 cm y 12 cm.
   b) Pirámide hexagonal regular de arista lateral 18 cm y arista básica 6 cm.

3. Calcula el volumen de estos cuerpos:



4. Calcula el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:
   a) Octaedro regular de arista 10 cm.
   b) Pirámide hexagonal regular cuya arista lateral mide 15 cm y la arista de la base

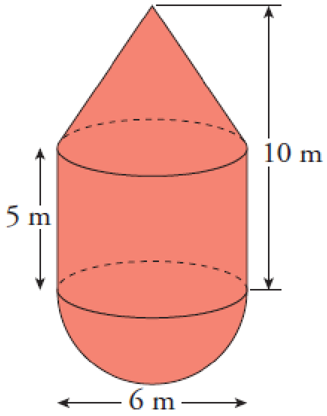
8 cm.

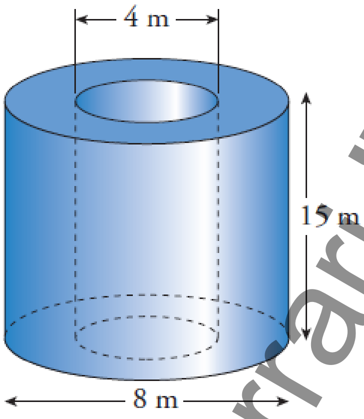
c) Cono de radio 9 cm y generatriz 15 cm.

d) Semiesfera de radio 10 cm.

e) Cilindro inscrito en un prisma recto de base cuadrada de lado 6 cm y altura 18 cm.

5. Calcula el volumen de estos cuerpos:

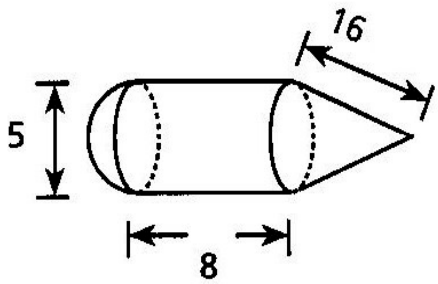




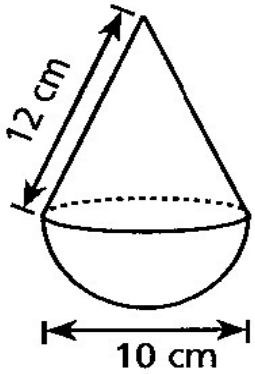
6. Calcula la superficie de un cilindro de radio de la base 3 cm y altura 4 cm.

7. Calcula la superficie de un cono de radio 2 cm y generatriz 1 m.

8. Tenemos un flotador para ir a la playa que tiene esta forma. Calcula la cantidad tejido hinchable necesario para confeccionarlo, si las medidas están en decímetros.



9. Una empresa de señales marítimas ha fabricado estas boyas de poliestireno. Calcula la cantidad de film transparente necesario para recubrir mil boyas. Una empresa de señales marítimas ha fabricado estas boyas de poliestireno. Calcula la cantidad de film transparente necesario para recubrir mil boyas.

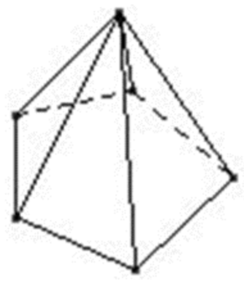


10. Calcula la capacidad de un prisma de base rectangular de 2 x 8 cm de base y 7 cm de altura.

11. Calcula el volumen de un prisma de base cuadrada de 5 cm de lado y 12 cm de altura.

12. Calcula el volumen de un prisma con altura 30 cm y base triangular de 10 cm de base y 20 cm de altura.

13. Calcula el volumen de la figura siguiente sabiendo que la base es un pentágono regular de 20 cm^2 de superficie y la altura de la pirámide es de 50 cm.



14. Calcula el volumen de una pirámide cuadrangular recta sabiendo que el lado de la base es 4 m y la altura es 6 m.

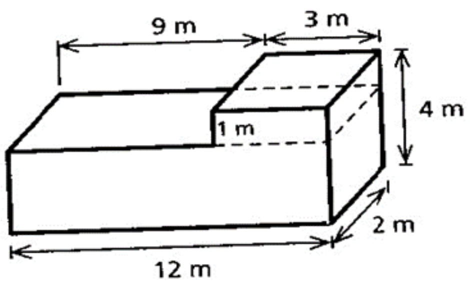
15.- Calcula el volumen de una pirámide que tenga por base un cuadrado de lado 4 dm y una altura de 36 cm.

16.- Calcula el volumen de un cilindro de radio de la base 3 cm y altura 4 cm.

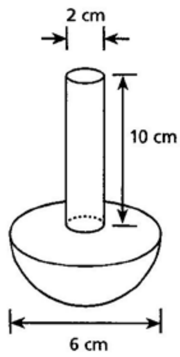
17.- Calcula el volumen de un cono de diámetro de la base 2 m y altura 4 m.

18.- Calcula el volumen de un cono de radio 4 m y generatriz 5 m.

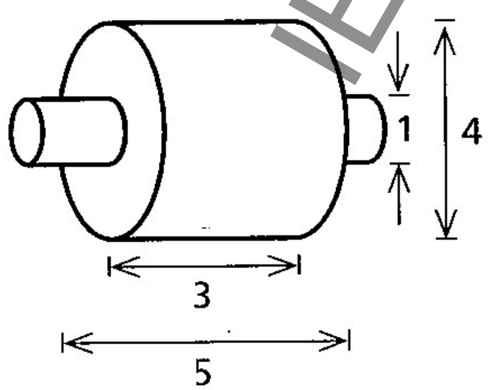
19.- Calcula el volumen de la siguiente figura:



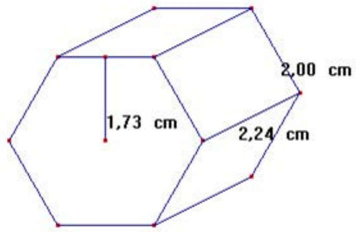
20.- Construimos un florero de cristal uniendo una semiesfera y un cilindro como se ve en la figura. Calcula su volumen.



21.- Fabricamos un rodillo de apisonadora como el de la imagen. Calcula su peso sabiendo que está fabricado con acero y cada centímetro cúbico de cemento pesa 30 gramos (unidades en metros):



23.- A continuación, te presentamos una celda de una colmena de abejas. Calcula cuál será la cantidad total de polen que cabe sabiendo que 1 g de polen ocupa 1 centímetro cúbico.



TEMA 12. Estadística

La Estadística es la parte de las Matemáticas que estudia una serie de datos para compararlos y sacar conclusiones. Los elementos principales de la Estadística son:

- Población: Es el conjunto total de individuos sobre los que se quiere estudiar unos datos determinados.
- Muestra: Cuando la población es muy grande (por ejemplo, todos los españoles) o difícil de estudiar se elige una muestra, que es una parte de la población representativa de la misma.
- Variable estadística: Es el dato o característica que se quiere estudiar. Por ejemplo: la estatura, la nota de matemáticas, etc.

Las variables estadísticas son las características que queremos estudiar y pueden ser de varios tipos:

- Variable cuantitativa: Es aquélla que estudia algo que se expresa mediante números. Ejemplo: la estatura, la nota de Matemáticas, etc.

  Puede ser:

  discreta, si toma valores aislados, habitualmente se corresponden con números enteros. Ejemplo, el número de hermanos de los alumnos de 3º de ESO

  continua, si toma todos los valores dentro de un intervalo. Ejemplo la estatura de los alumnos de 3º ESO.
- Variable cualitativa: Es aquélla que estudia algo que no puede expresarse por números, sino con palabras. Ejemplo: el título del último libro que has leído.

Se llama encuesta al procedimiento de elaborar las preguntas y respuestas que nos permite obtener los datos para hacer un estudio

El Estudio Estadístico tiene tres elementos característicos:

- Tablas de distribución de frecuencias. En un estudio estadístico, una vez obtenidos los datos hay que recontarlos, ordenarlos y tabularlos, esto es, colocarlos en tablas en las que se aprecie información sobre las frecuencias de cada valor o cada cualidad de la variable.
- Representación gráfica. Que da a conocer los datos de una forma gráfica.
- Medidas numéricas que resumen alguna característica de los datos.

1. Tablas de distribución de frecuencias.

Cuando la muestra es muy grande, la variable que estamos estudiando puede tener muchos valores repetidos, por lo que será muy útil agrupar estos valores en una tabla.

Ejemplo: Si preguntamos a 100 personas que sistema operativo tiene su móvil no sería muy informativo disponer de una lista de 100 palabras del tipo: Android, Android, iOS, Android, Android, iOS, iOS, iOS, Android, Android, iOS, iOS, ……
Sino que sería mucho más informativo saber cuántas personas tienen cada tipo de sistema operativo: Android 35 personas   iOS 65 personas.

Este procedimiento es el que vamos a realizar para organizar la muestra, utilizaremos una tabla que se llama tabla de distribución de frecuencias y está formada por varias columnas.
En estas tablas debemos incluir las siguientes columnas:
La primera columna incluye los **datos (xi)**, ordenados de menor a mayor si son datos numéricos.
En la segunda columna expresamos las **frecuencias absolutas (ni)**, que indican el número de veces que aparece cada valor (xi) de la variable .
En la tercera columna calculamos las **frecuencias absolutas acumuladas (Ni)**, que se forman sumando los valores de las frecuencias absolutas. Esta columna sólo se incluye si la variable es de tipo cuantitativo o si es de tipo cualitativo pero los valores de la variable admiten una ordenación natural.
En la cuarta columna escribimos las **frecuencias relativas (fi)**, que son el resultado de dividir la frecuencia absoluta entre el número total de datos (N). La suma de todas las frecuencias relativas es igual a 1. La frecuencia relativa se puede convertir en porcentaje multiplicándola por 100.
En la quinta columna calculamos las **frecuencias relativas acumuladas (Fi)**, que se obtienen sumando los valores de las frecuencias relativas. Esta columna sólo se incluye si la variable es de tipo cuantitativo o si es de tipo cualitativo pero los valores de la variable admiten una ordenación natural.

Ejemplo: Las calificaciones obtenidas por el alumnado de 3º E han sido:

Sobresaliente, Notable, Notable, Bien, Suficiente, Insuficiente, Suficiente, Notable, Bien, Insuficiente, Insuficiente, Notable, Notable, Sobresaliente, Notable, Notable, Notable, Suficiente, Suficiente, Insuficiente, Notable, Suficiente, Suficiente, Notable, Insuficiente, Sobresaliente, Insuficiente, Insuficiente, Notable, Notable, Sobresaliente, Notable, Notable.

La tabla de distribución de frecuencias debe contener todas las columnas puesto que la variable es de tipo cualitativo pero los valores de la variable se pueden ordenar ya que Insuficiente es menos que Bien y Notable menos que Sobresaliente.
Recuerda que la ordenación de los valores siempre se hace de menor a mayor valor.

Nota (xi)	Frecuencias absolutas (n_i)	Frecuencias absolutas acumuladas (N_i)	Frecuencias relativas (f_i)	Frecuencias relativas acumuladas (F_i)
Insuficiente	7	7	7/33=0.2121	0.2121
Suficiente	6	7+6=13	6/33=0.1818	0.3939
Bien	2	7+6+2=15	2/33=0.0606	0.4545
Notable	14	7+6+2+14=29	14/33=0.4242	0.8787
Sobresaliente	4	7+6+2+14+4=33	4/33=0.1212	0.9999
	33		1	

2. Gráficas.

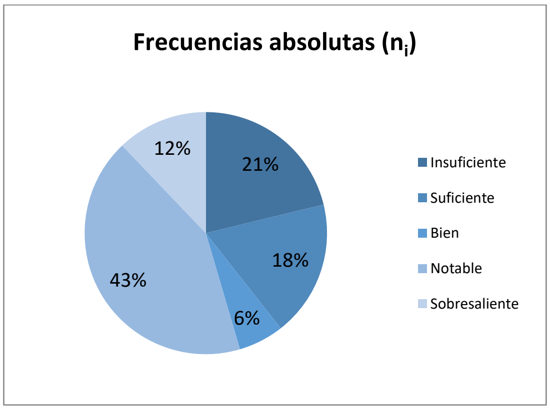
A veces es más sencillo apreciar el comportamiento de los datos si los tenemos de una forma gráfica. Haremos una gráfica adecuada al tipo de variable que tengamos, no haremos la misma para variables cualitativas que para variables cuantitativas.
Para la elaboración de los diagramas hay que utilizar los valores obtenidos en las tablas de distribución de frecuencias como punto de partida.
Los diferentes diagramas que haremos son:

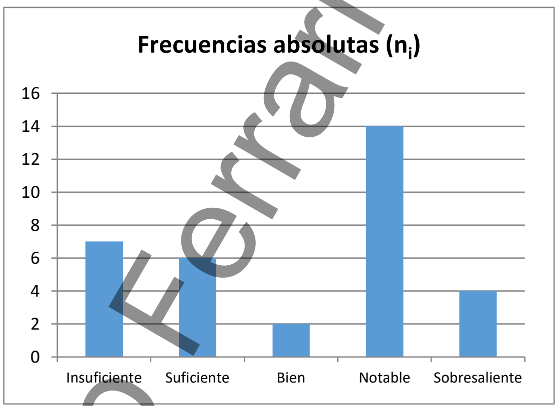
- **Diagrama de sectores**. En un círculo se marcan segmentos proporcionales a las frecuencias relativas. Suele ayudar añadir una columna calculando el ángulo que debemos utilizar para cada valor observado. Para calcular haremos un reparto proporcional a las frecuencias relativas de cada caso.
- **Diagrama de barras.** En el eje horizontal se hacen marcas para cada uno de los valores de la variable y se levanta una barra igual a la frecuencia absoluta o a la frecuencia relativa. No hay que pegar las barras.

  Si la variable admite frecuencias acumuladas, también se pueden hacer diagramas de barras acumulativos.

Ejemplo: Representa el diagrama de sectores y el diagrama de barras para los datos del ejemplo de las notas de 3º E.
Tomamos la tabla y añadimos la columna correspondiente a los ángulos para el diagrama de sectores:

Nota (x_i)	Frecuencias absolutas (n_i)	Frecuencias relativas (f_i)	Ángulo
Insuficiente	7	0.2121	0.2121·360=76,3560
Suficiente	6	0.1818	0.1818·360=65,4480
Bien	2	0.0606	0.0606·360=21,8160
Notable	14	0.4242	0.4242·360=152,7120
Sobresaliente	4	0.1212	0.1212·360=43,6320
	33		





- **Histograma.** Se divide el eje horizontal según los intervalos de la tabla de distribución de frecuencias y se levantan barras cuya área sea proporcional a las frecuencias. Si hemos tenido la precaución de utilizar intervalos de la misma amplitud la altura de las barras será la frecuencia relativa. La principal característica de estas gráficas, para mantener la idea de continuidad en los valores de la variable, es que se pegarán las barras en los diagramas.
- **Histograma acumulado.** Se realiza igual que el histograma, pero utilizando las frecuencias relativas acumuladas. Siempre es creciente y las barras siguen pegadas.
- **Polígono de frecuencias.** Si al hacer el histograma marcamos en la parte superior de cada barra, justo en el medio, y unimos esos puntos, nos queda un polígono cuyos vértices coinciden con las marcas de clase de cada uno de los intervalos.
- **Polígono de frecuencias acumuladas.** Su construcción es similar al polígono de frecuencias, pero ahora partimos del histograma acumulado. En lugar de usar los puntos medios, la poligonal se hace al final de cada una de las barras.

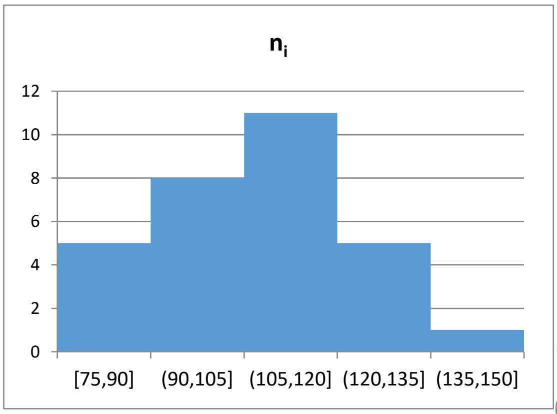
Ejemplo: La duración (en minutos) de las últimas 30 películas que he visto en el cine ha sido.

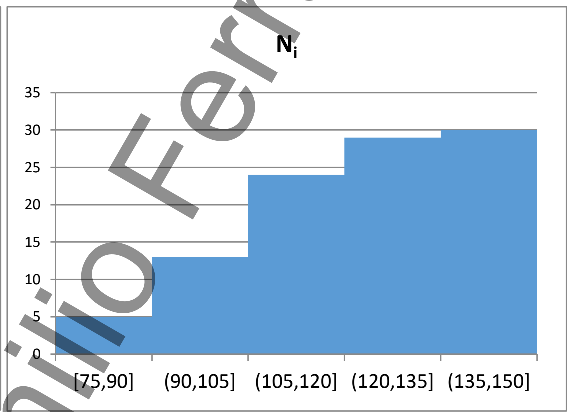
118, 119, 126, 123, 101, 103, 108, 117, 123, 101, 104, 141, 113, 117,
105, 95, 113, 76, 135, 84, 91, 118, 81, 94, 86, 126, 110, 102, 109, 117

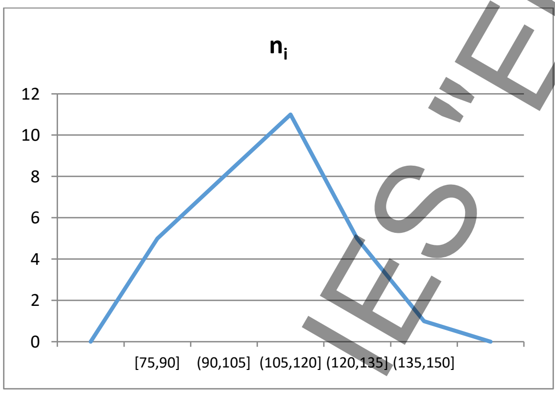
Realiza el histograma, el histograma acumulado, el polígono de frecuencias y el polígono de frecuencias acumuladas para estos datos.

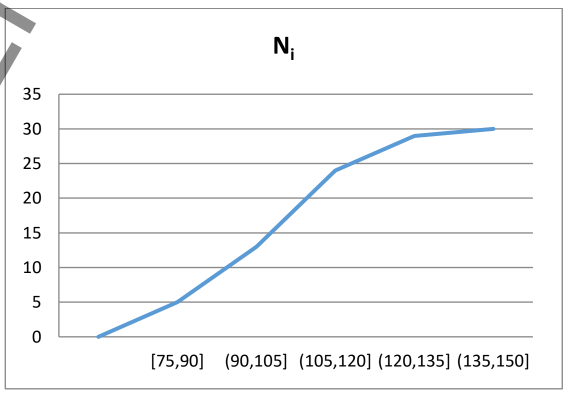
Lo primero que tenemos que hacer es calcular la tabla de distribución de frecuencias:

Duración	n_i	N_i	f_i	F_i
[75,90]	5	5	0.1667	0.1667
(90,105]	8	13	0.2667	0.4333
(105,120]	11	24	0.3667	0.8
(120,135]	5	29	0.1667	0.9667
(135,150]	1	30	0.0333	1
	30			









- **Pictogramas.** En la actualidad, debido al uso de herramientas informáticas hay un gran número de variedades de gráficos. En todos ellos deberían estar representadas o bien las frecuencias absolutas o bien las frecuencias relativas.

3. Medidas numéricas.

Las medidas numéricas nos permiten describir los aspectos característicos de las observaciones que tenemos y comparar los resultados de nuestro estudio con los de otros estudios similares, sin necesidad de tener que comprobar dato a dato.

Igual que en las tablas de distribución de frecuencias, habrá distintas medidas a calcular, dependiendo del tipo de variable con la que estemos trabajando. De nuevo serán más numerosas las medidas que podamos realizar con las variables cuantitativas continuas y tendremos menos opciones para las variables cualitativas.

Podemos calcular la **Moda**, que es el dato con mayor frecuencia absoluta, o con mayor frecuencia relativa, ya que siempre coincide.

Para obtener la **Mediana** necesitamos la columna de frecuencias relativas acumuladas (Fi). La Mediana es el dato que corresponde con el primer valor de Fi que supere a 0,5.

El **primer cuartil Q_1** es el primer valor cuya frecuencia relativa acumulada supera 0,25 y el **tercer cuartil Q_3** es el primer valor que supera 0,75.

Ejemplo: Calcula la Moda, Mediana, primer cuartil y tercer cuartil en los datos del ejemplo de las notas de 3º E.

Si vamos a la tabla de distribución de frecuencias:

Nota (x_i)	n_i	N_i	f_i	F_i
Insuficiente	7	7	0.2121	0.2121
Suficiente	6	13	0.1818	0.3939
Bien	2	15	0.0606	0.4545
Notable	14	29	0.4242	0.8787
Sobresaliente	4	33	0.1212	0.9999

La moda es Notable, ya que su frecuencia absoluta (ni) es la mayor de todas.

La mediana es Notable, porque la frecuencia relativa acumulada Fi correspondiente a Notable es 0.8787 y es el primer valor que supera 0.5.

El primer cuartil es Suficiente, porque la frecuencia relativa acumulada Fi correspondiente a Suficiente es 0.3939 y es el primer valor que supera 0.25.

El tercer cuartil también es Notable, porque la frecuencia relativa acumulada Fi correspondiente a Notable es 0.8787 y es el primer valor que supera 0.75.

La **Media** es el resultado de sumar todos los datos y dividir por el número de ellos. Se puede calcular ese mismo valor de una forma más rápida, utilizando las columnas de datos y de frecuencias absolutas o también la columna de datos y las frecuencias relativas. Se designa por el símbolo $\overline{X}$.

Podemos calcular la media de dos formas distintas, la primera es para los datos sin agrupar en la tabla, en ese caso calculamos:

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum x_i$$

Hay una segunda forma de calcular la media si disponemos de la tabla de distribución de frecuencias, en este caso añadimos nueva columna, formada por el producto de las dos primeras columnas:

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i	$n_i \cdot x_i$
Iguales que antes					Es el producto de las dos primeras columnas

En este caso la fórmula es $\overline{X} = \frac{1}{N}\sum n_i \cdot x_i$

Si los datos están agrupados por intervalos, tenemos que calcular también las marcas de clase, que son los puntos medios de los intervalos que utilizamos en la agrupación.
La media calculada con los datos NO coincide con la media calculada con los datos de la tabla, pero siempre va a ser una buena aproximación y casi siempre se tarda menos tiempo en calcular la media para los datos agrupados que para los datos sin agrupar, sobre todo si el tamaño de la muestra es muy grande.

Ejemplo: Calcula la media para los datos sin agrupar y para los datos de la tabla de distribución de frecuencias en los datos correspondientes a la duración de las películas.
Para calcular la media tenemos que sumar todos los datos y dividir entre 30, ya que hay 30 observaciones (N = 30)

118+119+126+123+101+103+108+117+123+101+104+141+113+117+105+95+113+76+135+84+91+118+81+94+86+126+110+102+109+117 = 3256

$$\overline{X} = \frac{3256}{30} = 108{,}53$$

Para calcular la media con los datos agrupados en la tabla, debemos añadir dos nuevas columnas, la de las marcas de clase y la de los productos $n_i \cdot m_i$.

Duración	Marca de clase m_i	n_i	N_i	f_i	F_i	$n_i \cdot m_i$
[75,90]	82.5	5	5	0.1667	0.1667	82.5·5 = 412.5
(90,105]	97.5	8	13	0.2667	0.4333	97.5·8 = 780
(105,120]	112.5	11	24	0.3667	0.8	112.5·11 =1237.5
(120,135]	127.5	5	29	0.1667	0.9667	127.5·5 = 637.5
(135,150]	142.5	1	30	0.0333	1	142.5·1 = 142.5
		30				Suma = 3210

$\overline{X} \simeq \frac{3210}{30} = 107$

La **Varianza** indica la dispersión de los datos, es decir, si estos se encuentran juntos o separados entre sí. Nos referimos a ella con el símbolo **S^2 o Var X**.

Para calcular la Varianza hay que haber obtenido previamente la media. Hay dos formas de calcular la Varianza, la primera es para los datos sin agrupar, su fórmula es:

$$S^2 = \frac{1}{N}\sum\left(x_i - \overline{X}\right)^2$$

También se puede utilizar la tabla de distribución de frecuencias, para ello tendremos que añadir una nueva columna:

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i	$n_i \cdot x_i$	$n_i \cdot x_i^2$
Iguales que antes						Podemos calcular los valores en dos pasos, primero el cuadrado de los datos de la primera columna y luego los multiplicamos por la segunda

En este caso utilizaremos la fórmula $S^2 = \frac{1}{N}\sum n_i \cdot x_i^2 - \overline{X}^2$ Si los datos están agrupados por intervalo también utilizaremos las marcas de clase $S^2 \simeq \frac{1}{N}\sum n_i \cdot m_i^2 - \overline{X}^2$

La **desviación típica**, **S**, es la raíz cuadrada de la varianza. Se calcula porque tiene las mismas unidades de medida que los propios datos y que la media.

El **coeficiente de variación (CV)**, es el cociente entre la desviación típica y el valor absoluto de la media, se utiliza para comparar estudios estadísticos distintos.

Otros parámetros de interés para son el **Mínimo** $X_{(1)}$, el **Máximo** $X_{(N)}$, el Rango = $X_{(N)}$ - $X_{(1)}$ y el **Rango Intercuartílico (RIQ)**= $Q_3 - Q_1$. Estos últimos dan idea de la dispersión de los datos.

Ejemplo: A partir de los datos correspondientes a la duración de las 30 películas calcula las siguientes medidas:

Varianza, desviación típica, coeficiente de variación, mínimo, máximo, rango y rango intercuartílico.

a) Para los datos sin agrupar en tabla de distribución de frecuencias.
b) Para los datos agrupados en la tabla.

a) Si consideramos los datos sin agrupar en tabla de distribución de frecuencias, tenemos que usar la fórmula:

$$S^2 = \frac{1}{N}\sum\left(x_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{30}\left[(118-108.53)^2 + (119-108.53)^2 + \ldots + (117-108.53)^2\right]$$

Que después de un buen rato, si no nos confundimos al introducir los datos, resulta:

$$S^2 = \frac{1}{N}\sum\left(x_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{7177.4667}{30} = 239.34$$

La desviación típica es

$$S = \sqrt{239.34} = 15.4677$$

El coeficiente de variación

$$CV = \frac{S}{\overline{X}} = \frac{15.4677}{108.53} = 0.1425$$

El mínimo es 76 y el máximo es 141. Por tanto, el rango es 141 – 76 = 65

El primer cuartil es Q_1 = 101 y el tercer cuartil es Q_3 = 118, de donde el rango intercuartílico es RIQ = 118 – 101 = 17.

b) Si consideramos los datos agrupados en la tabla de distribución de frecuencias:

Duración	Marca de clase m_i	n_i	F_i	$n_i \cdot m_i^2$
[75,90]	82.5	5	0.1667	5 · 82.52 = 34031.25
(90,105]	97.5	8	0.4333	8·97.52 = 76050
(105,120]	112.5	11	0.8	11·112.52=139218.75
(120,135]	127.5	5	0.9667	5·127.52 =81281.25
(135,150]	142.5	1	1	1·142.52 =20306,25
		30		350887.5

En esta tabla ya hemos visto que $\overline{X} \simeq \frac{3210}{30} = 107$

Por tanto, la varianza será $S^2 \simeq \frac{1}{N}\sum n_i \cdot x_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{350887.5}{30} - 107^2 = 247.25$

La desviación típica es $S = \sqrt{247.25} = 15.7241$

El coeficiente de variación $CV = \frac{S}{\bar{X}} = \frac{15.7241}{107} = 0.1469$

El mínimo es 76 y el máximo es 141. Por tanto, el rango es 141 – 76 = 65

El primer cuartil es Q_1 = 97.5 y el tercer cuartil es Q_3 = 112.5, de donde el rango intercuartílico es RIQ = 112.5 – 97.5= 15.

Hay que darse cuenta de que estos valores no son exactamente los mismos que se obtienen con los datos originales, pero son bastante más rápidos de calcular y siempre son buenas aproximaciones de éstos.

Ejercicios:

1. En una clase de 3º ESO se ha realizado un examen final de tipo test que constaba de 8 preguntas. El número de respuestas correctas conseguidas por cada uno de los estudiantes de esa clase han sido:

3, 7, 7, 3, 1, 7, 6, 3, 4, 8, 3, 4, 2, 7, 5, 3, 6, 6, 3, 5, 7, 6, 7, 5, 3, 4

¿Cuántos alumnos han contestado al examen final? Construye la tabla de distribución de frecuencias para estos datos.

2. Realiza un diagrama de barras que represente las respuestas correctas de los alumnos indicados en el ejercicio 1.

3. Utilizando los datos del ejercicio 1, calcula las siguientes medidas numéricas:

Moda, mediana, media, mínimo, máximo, primer cuartil, tercer cuartil, varianza, desviación típica, coeficiente de variación, rango y rango intercuartílico.

4. En una clase de 3º ESO se ha realizado un examen final de tipo test que constaba de 30 preguntas. El número de respuestas correctas conseguidas por cada uno de los estudiantes de esa clase han sido:

15, 10, 30, 5, 7, 25, 24, 30, 25, 23, 14, 25, 12, 11, 28, 17, 12, 14, 30, 20, 10, 5, 15, 24, 30, 20, 12, 25, 22, 11

¿Cuántos alumnos han contestado al examen final? Construye la tabla de distribución de frecuencias para estos datos.

5. Realiza un histograma que represente las respuestas correctas de los alumnos indicados en el ejercicio 4.

6. Utilizando los datos del ejercicio 4, calcula las siguientes medidas numéricas para los datos indicados.

Moda, mediana, media, mínimo, máximo, primer cuartil, tercer cuartil, varianza, desviación típica, coeficiente de variación, rango y rango intercuartílico.

7. Utilizando los datos del ejercicio 4, calcula las siguientes medidas numéricas para los datos agrupados en la tabla de distribución de frecuencias.

Moda, mediana, media, mínimo, máximo, primer cuartil, tercer cuartil, varianza, desviación típica, coeficiente de variación, rango y rango intercuartílico.

8. Se ha aplicado una prueba de cálculo mental compuesta por 90 preguntas a 157 estudiantes de 3.º ESO. Los resultados se recogen en la siguiente tabla:

Preguntas correctas	Estudiantes
(0,15]	2
(15,30]	8
(30,45]	15
(45,60]	33
(60,75]	27
(75,90]	22

Se considera que un estudiante domina el cálculo mental cuando el número de preguntas correctas es superior a 60. ¿Qué porcentaje de estudiantes tienen que mejorar su cálculo mental?

9. Haz una representación gráfica para los datos del ejercicio 8.

10. Utilizando los datos del ejercicio 8, calcula las siguientes medidas numéricas.

Moda, mediana, media, mínimo, máximo, primer cuartil, tercer cuartil, varianza, desviación típica, coeficiente de variación, rango y rango intercuartílico.

11. Tiramos sucesivamente una moneda y anotamos el número de lanzamientos que necesitamos hasta obtener por primera vez cara. Realizamos el experimento 100 veces, con los siguientes resultados:

Lanzamiento en el que sale cara por primera vez	Número de veces que ha ocurrido
1	53
2	23
3	15
4	5
5	3
6	1

Calcula los siguientes parámetros: Moda, mediana, media, mínimo, máximo, primer cuartil, tercer cuartil, varianza, desviación típica, coeficiente de variación, rango y rango intercuartílico.

12. El peso, redondeado a kg, de los 157 estudiantes de 3º ESO, está en la siguiente tabla.

Peso	Número de alumnos
(40,45]	3
(45,50]	39
(50,55]	81
(55,60]	31
(60,65]	2
(65,70]	1

Construye la tabla de distribución de frecuencias y un diagrama adecuado para los datos.

13. Utilizando los datos del ejercicio anterior, calcula las siguientes medidas:

Moda, mediana, media, mínimo, máximo, primer cuartil, tercer cuartil, varianza, desviación típica, coeficiente de variación, rango y rango intercuartílico.

14. El peso, redondeado a kg, de los 157 estudiantes de 3º ESO, está en la siguiente tabla.

Peso	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
Nº de alumnos	3	3	7	12	7	10	16	27	9	15	14

Peso	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66
Nº de alumnos	9	12	4	4	2	2	0	0	0	0	1

Construye la tabla de distribución de frecuencias y un diagrama adecuado para los datos.

15. Utilizando los datos del ejercicio anterior, calcula las siguientes medidas:

Moda, mediana, media, mínimo, máximo, primer cuartil, tercer cuartil, varianza, desviación típica, coeficiente de variación, rango y rango intercuartílico.

16. El tiempo que tardan los 40 trabajadores de una fábrica para trasladarse desde su casa al trabajo, en minutos, es el que se indica:

14, 32, 18, 27, 20, 35, 40, 28, 34, 20, 11, 6, 25, 10, 15, 33, 16, 45, 35, 32, 15, 14, 17, 25, 13, 22, 37, 20, 18, 19, 34, 41, 42, 10, 8, 14, 19, 40, 42, 22

Agrupa los datos en intervalos de amplitud 10 minutos, comenzando por [0, 10).

Haz la tabla correspondiente, indicando las marcas de clase y las frecuencias absolutas y relativas.

Representa los datos en una gráfica apropiada.

Calcula las medidas numéricas que puedan ser aplicadas al conjunto de datos.

17. Se ha preguntado a un grupo de alumnos de 3º de ESO cuál es su deporte favorito, obteniéndose los siguientes datos.

Deporte	Fútbol	Baloncesto	Tenis	Ciclismo	Otros
Nº de alumnos	35	23	15	8	41

Construye el diagrama de sectores correspondiente.

Calcula las medidas que consideres adecuadas para este tipo de datos.

18. En un instituto se ha estudiado la distribución de los alumnos de ESO por sexos. Los resultados se dan en la siguiente tabla.

Curso	Chicas	Chicos
1º ESO	68	64
2º ESO	74	66
3º ESO	56	53
4º ESO	83	75
1º Bachillerato	41	45
2º Bachillerato	43	52

Representa el número de chicas en un diagrama de sectores.

Representa el número de chicos en un diagrama de sectores.

Calcula las medidas numéricas adecuadas para el número de chicas.

Calcula las medidas numéricas adecuadas para el número de chicos.

19. Los puntos conseguidos por dos jugadoras de baloncesto en los últimos 10 partidos han sido:

Marta	22	29	18	21	20	19	25	20	19	21
Ana	16	20	12	27	10	16	21	24	22	25

a) Halla la anotación media de cada una de las dos.

b) Calcula la desviación típica y el coeficiente de variación. ¿Cuál de las dos es más regular?

20. En un control de velocidad en carretera se obtuvieron los siguientes datos:

Velocidad	Número de vehículos
(60,70]	15
(70,80]	25
(80,90]	37
(90,100]	48
(100,110]	33
(110,120]	23
(120,130]	16
(140,150]	5
(150,160]	1

a) Haz una tabla reflejando las marcas de clase y las frecuencias.

b) Calcula la velocidad media y la desviación típica.

c) ¿Qué porcentaje de vehículos circula a más de 120 km/h?

TEMA 13. Azar y probabilidad

Se dice que un experimento es **aleatorio** cuando al repetirlo en las mismas condiciones no se puede predecir el resultado, por ejemplo, al tirar un dado no sabemos qué resultado va a salir. Cuando un experimento no es aleatorio se denomina experimento **determinista**.

Al conjunto de resultados de un experimento aleatorio se le denomina **espacio muestral**.

A cada elemento del espacio muestral se le denomina **suceso elemental** y a cada posible resultado de un experimento se le llama suceso.

Ejemplo: \`Tirar un dado y anotar el resultado'

El espacio muestral es el conjunto E = {1,2,3,4,5,6}

Se llama suceso elemental a {1} salir un uno, {2} salir un dos, {3} salir un tres, {4} salir un cuatro, {5} salir un cinco y el último suceso elemental es {6} salir un seis.

Un ejemplo de suceso es 'Salir un resultado par' es decir {2,4,6}

Otro ejemplo es \`Salir un resultado menor de 3' es decir {1,2}

A cada suceso se le asigna un valor numérico que nos dice lo fácil o difícil que es la ocurrencia de ese suceso. Ese número está siempre comprendido entre 0 y 1, de forma que será 0 cuando el suceso no ocurra nunca y será 1 cuando siempre ocurra. Cualquier otro suceso tomará un valor intermedio, de forma que si es fácil que ocurra estará próximo a uno y si es difícil que ocurra estará próximo a cero.

La forma de asignar probabilidades en los espacios muestrales donde todos los sucesos elementales tienen las mismas opciones de salir es contar el número de elementos del espacio muestral, n, y asignar a cada uno de ellos la probabilidad $\frac{1}{n}$

En estos espacios usamos la Regla de Laplace, para asignar las probabilidades de cada suceso, de tal forma que sólo tenemos que contar el número de suceso elementales en el suceso y dividir entre n.

Ejemplo:

En el ejemplo anterior la probabilidad de sacar un uno es:

p(1)= $\frac{1}{6}$, pues el espacio muestral tiene seis elementos

p(sacar un número par) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ puesto que hay tres números pares que pueden salir {2,4,6}

Ejemplo:

En una urna tenemos 26 bolas, hay 5 negras, 9 blancas y el resto son la mitad verdes y la mitad azules. Describe el espacio muestral y las probabilidades de los sucesos elementales.

El espacio muestral es el conjunto $\{Negra, Blanca, Verde, Azul\}$y las probabilidades de cada suceso elemental son:

$$p(Negra)=\frac{5}{26} \quad p(Blanca)=\frac{9}{26} \quad p(Verde)=\frac{6}{26} \quad p(Azul)=\frac{6}{26}$$

Ejemplo: Calcula las siguientes probabilidades del ejemplo anterior

a) Sacar una bola negra $p(Negra)=\frac{5}{26}$

b) Sacar una bola blanca $p(Blanca)=\frac{9}{26}$

c) Sacar una bola que no sea negra $p(No\ Negra)=\frac{21}{26}$

d) Sacar una bola que no sea azul $p(No\ Azul)=\frac{20}{26}=\frac{10}{13}$

e) Sacar una bola azul $p(Azul)=\frac{6}{26}$

f) Sacar una bola roja $p(Roja)=0$

1. Propiedades de la probabilidad

Dos sucesos de un espacio muestral se dice que son incompatibles cuando no tienen ningún elemento en común y su intersección $A\cap B$ es el conjunto vacío $\emptyset$. Los sucesos que tienen algún elemento común en su intersección se llaman sucesos compatibles.

Las propiedades de la probabilidad son las siguientes:

Propiedad 1. La probabilidad de un suceso, A, está siempre comprendida entre 0 y 1.

$$0\le p(A)\le 1$$

Como consecuencia sabemos que $p(\emptyset)=0$ y que $p(E)=1$

Propiedad 2. La suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales es 1. $p(A)+p(B)=1$

Propiedad 3. La probabilidad de la unión de sucesos incompatibles es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos que lo forman.

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)$$

Como consecuencia tenemos que la suma de probabilidades de un suceso y su contrario es 1.

$$p(A)+p(A^c)=1$$

Propiedad 4. La probabilidad de la unión de sucesos compatibles es igual a la suma de las probabilidades de esos sucesos menos la probabilidad del suceso intersección de los mismos.

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$

Ejercicio: Al lanzar un dado y anotar el resultado, se consideran los sucesos A = {sacar un 2 o un 4}, B = {sacar un 6} y C = {Sacar múltiplo de 3}

Calcula $p(B \cup C),\ p(A \cup B), p(A^c)\ y\ p(A \cap B)$

Calculamos primero $p(A) = \frac{2}{6} = 0.33 \quad p(B) = \frac{1}{6} = 0.17 \quad p(C) = \frac{2}{6} = 0.33$

$$p(B \cup C) = p(B) + p(C) - p(B \cap C) = 0.17 + 0.33 - 0.17 = 0.33$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = 0.33 + 0.17 = 0.5$$

$$p(A^c) = 1 - p(A) = 1 - 0.33 = 0.67$$

$$p(A \cap B) = p(\varnothing) = 0$$

2. Experimentos compuestos

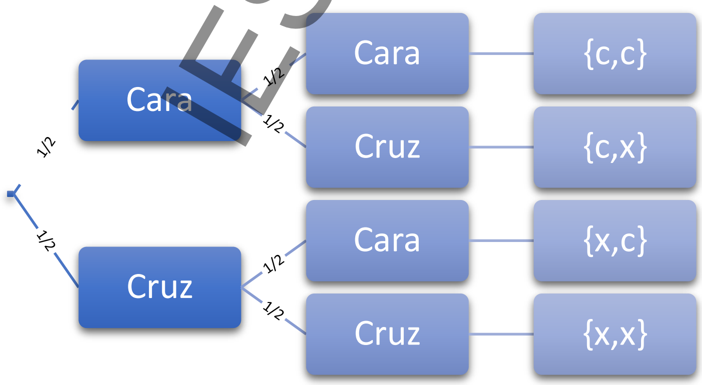
Se llama **experimento compuesto** al experimento que está formado por dos o más experimentos simples.

Los experimentos compuestos pueden estar formados por dos o más experimentos simples que sean iguales, como el resultado de anotar las tres tiradas de una moneda, o diferentes si en un primer experimento seleccionamos si tiramos un dado de 6 o 12 caras y el segundo experimento consiste en anotar el resultado.

Para obtener el espacio muestral asociado a un experimento compuesto se suelen utilizar los diagramas de árbol. Para calcular las probabilidades utilizamos dos reglas fundamentales:

1. Regla de la probabilidad compuesta. La probabilidad de un camino en un diagrama de árbol es igual al producto de las probabilidades de las ramas que lo forman.
2. Regla de la probabilidad total. La probabilidad de varios caminos en un diagrama de árbol es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de los caminos.

Ejemplo: Ana tira una moneda dos veces y anota los resultados. Describe el espacio muestral y calcula la probabilidad de sacar dos caras.



Para calcular la probabilidad de sacar dos caras tenemos $\mathrm{p(c,c)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0.25$

Para calcular la probabilidad de sacar dos resultados diferentes tenemos que aplicar la regla de probabilidad total y sumar dos caminos, que son $p(c,x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ y $p(x,c)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ y así

$$p(\textit{dos resultados}\text{ distintos})=p(c,x)+p(x,c)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

EJERCICIOS

1. En la ciudad de Valladolid, la probabilidad de medir más de 170 centímetros es del 27 %, y la de ser aficionado al Pucela, del 65 %. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar mida menos de 170 cm y sea aficionado del Pucela?

2. Los alumnos de 3.º de ESO del instituto sortean un ordenador para conseguir ingresos destinados a su viaje de fin de curso. Venden papeletas numeradas del 1 al 100. Calcula la probabilidad de ganar el ordenador si se adquieren todas las papeletas que sean múltiplos de 3 o de 5.

3. Marcos quiere hacer los deberes, tiene de tres materias, Lengua, Matemáticas e inglés. Hace un sorteo para determinar el orden, para ello tira un dado, si sale 1 o 2, hará los deberes de Lengua, si sale 3 o 4 hará los de Matemáticas y si sale 5 o 6 hará los de inglés. Cuando ha terminado los deberes hace un sorteo entre las dos materias que le quedan. Calcula la probabilidad de hacer los deberes de Matemáticas antes que los de Lengua.

4. Se lanza un dado. Se consideran los sucesos A = {sacar múltiplo de 3}, B = {sacar un número par} y C = {sacar un número menor que 3}. Calcula

a) p(A)
b) p(B)
c) p(C)
d) $p(A^c)$
e) $p(A\cup C)$
f) $p(A\cup B)$
g) $p(A^c\cup B)$

5. Un participante de un concurso de televisión debe extraer una bola de una urna, si es de color verde gana el concurso, si es de color rojo, pierde. El presentador dispone de dos cajas diferentes para mostrar al concursante. En la primera hay 5 bolas, de las cuales sólo una es verde. En la segunda hay 8 bolas, de las que sólo 2 son verdes. Si el concursante no sabe qué caja le muestra el presentador y no ve la bola que saca de la caja, ¿cuál es la probabilidad de ganar el concurso?

6. En una clase hay 12 chicas y 11 chicos. Si van saliendo al azar, calcula:

a) La probabilidad de que las dos primeras personas que salgan sean dos chicas.
b) La probabilidad de que las dos primeras personas que salgan sean chicos.
c) La probabilidad de que las dos primeras personas que salgan sean de distinto sexo.
d) La probabilidad de que las dos primeras personas que salgan sean una chica y un chico, por ese orden.

7. Marta tiene en el bolsillo 3 monedas de 1 €, 5 de 2€ y 4 monedas de 50 céntimos. Si saca dos monedas al azar, calcular:

a) La probabilidad de tener más de 2 €.

b) La probabilidad de tener menos de 1 €.

8. Si se supone que en una familia la probabilidad de nacer niña es 0,53, y la de nacer niño, 0,47. Si tienen tres descendientes, ¿cuál es la probabilidad de que sean dos niñas y un niño?

9. En un centro de enseñanza secundaria, el 55% de los estudiantes matriculados son chicas. Se sabe que el 65 % de las alumnas no han estado enfermas durante el curso y que el 25 % de los alumnos tampoco. Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se haya encontrado enfermo? Realiza el diagrama en árbol correspondiente.

10. Se lanza una moneda al aire y, si sale cara, se extrae una bola de la primera urna, y si aparece cruz, una de la segunda. Dibuja un diagrama en árbol indicando la probabilidad de cada suceso y calcula la probabilidad de que la bola extraída sea blanca. En la primera urna hay 7 bolas Blancas y 3 Negras, mientras que en la segunda urna hay 4 Blancas y 6 Negras.

11. Cuando salgo con mis 5 amigos sorteamos con un dado quién elige donde comer. Si el elegido es Juan, la mitad de los días elige pizzería y la otra mitad elige hamburguesería. Si eligen Marta o Lucía, la tercera parte de los días eligen hamburguesería, la tercer parte crepería y el resto de los días eligen pizzería. Si los elegidos son Ana o Lucas la mitad de los días eligen hamburguesería, la cuarta parte crepería y el resto pizzería. Si elijo yo la mitad de los días elijo pizzería y el resto hamburguesería. Calcula la probabilidad de elegir una pizzería para comer.

12. Pedro desea coger la bicicleta guardada en su trastero, y para ello necesita abrir dos puertas. Dispone de 4 llaves: dos de ellas abren la primera puerta; otra de ellas, la segunda, y la cuarta es maestra y abre las dos puertas. ¿Cuál es la probabilidad de que abra las dos puertas en el primer intento si escoge las llaves al azar?

13. ¿Qué es más probable?

a) Salir 3 al tirar un dado de 6 caras.

b) Sacar espadas al extraer una carta.

c) Obtener dos caras al lanzar dos monedas.

14. En una fábrica de donuts, los productos pasan por 3 pruebas independientes. En la primera se detecta si el donut está roto y se localizan un 8 % de productos con defectos; en la segunda se mira el envase y se descartan un 12 % de los productos, y en la tercera se comprueba el etiquetado, descartándose un 15 %. Halla la probabilidad de que un producto tenga:

a) 0 defectos.

b) 1 defecto.

c) 2 defectos.

15. En una bolsa hay bolas iguales de distintos colores: 3 blancas, 4 negras y 5 rojas. Si se extrae una bola y se mira el color, halla la probabilidad de que:

a) Sea blanca

b) Sea negra

c) Sea roja

d) No sea negra

16. En una bolsa hay bolas iguales de distintos colores: 3 blancas, 4 negras y 5 rojas. María extrae una bola y se queda con ella, luego Pilar extrae otra bola y anota el color. Halla la probabilidad de que:

a) Tengan dos bolas blancas

b) Tengan dos negras

c) Tengan dos rojas

d) La bola de Pilar no sea negra

17. Se tira una moneda, si sale cara se saca una bola de la urna A que contiene una bola roja, una azul y una verde; y si sale cruz se saca de la urna B en la que hay una bola roja, una azul, una blanca y una negra. Escribe los posibles resultados.

18. Marta y María juegan un campeonato de parchís, vence la primera que gane dos partidas seguidas o tres alternas. ¿De cuántas maneras se puede desarrollar el juego?

19. Lanzamos dos dados y nos fijamos en la menor de las puntuaciones. Calcula la probabilidad de que sea un 3.

20. La probabilidad de un suceso A es P(A)=0.55, la de otro suceso B es P(B)=0.45 y la de la intersección de ambos es $p(A \cap B) = 0.2$. Calcula la probabilidad de $A \cup B$.