Matemáticas “método Singapur”

Pedro Ramos Alonso
Facultad de Educación
Universidad de Alcalá
pedro.ramos@uah.es

http://masideas-menoscuentas.com/
@MsIdeasMnosCtas

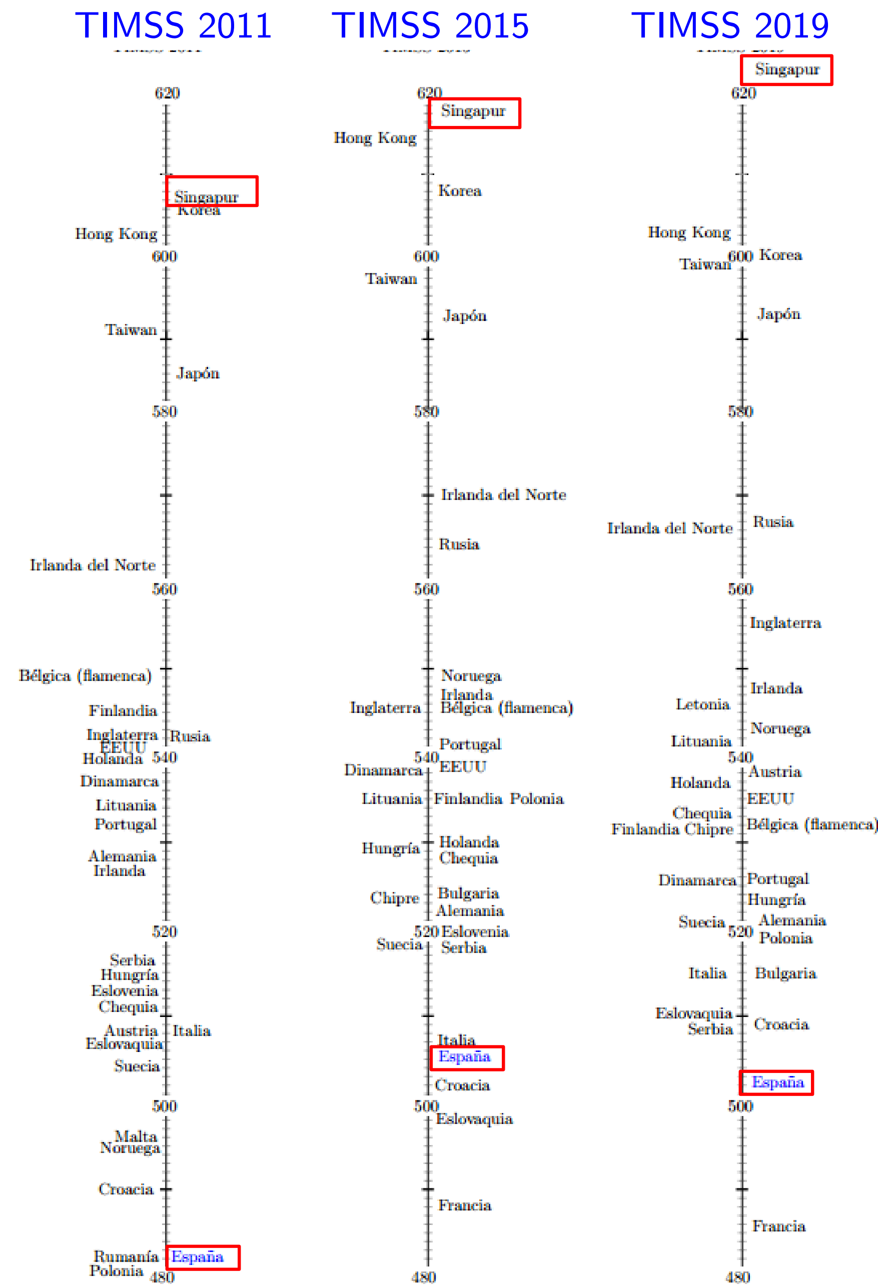
La situación actual en España

* ¿Estamos de acuerdo en que tenemos problemas?

* Información:

  https://www.educacionyfp.gob.es/inee/evaluaciones-internacionales/timss/timss-2019.html

* ¿Tenemos un diagnóstico para origen de los problemas?



Un vídeo para reflexionar

* Sobre la enseñanza de las matemáticas en Singapur en los años 70:

  https://youtu.be/Lu2o_9LjWIw

* Sus errores:
  - Exceso de cálculos tediosos.
  - Aprendizaje rutinario de procedimientos, sin entenderlos.
  - Aprendizaje memorístico.

* El desarrollo de lo que se conoce como “método Singapur” fue la respuesta.

* Basado en ideas “clásicas” de la didáctica de las matemáticas occidental.

Fundamentos metodológicos

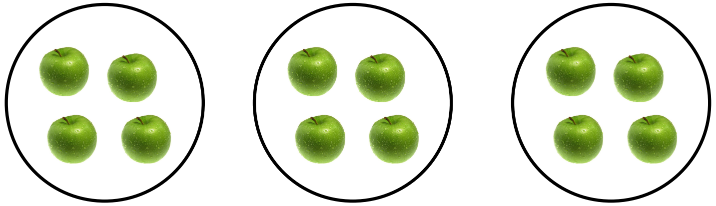
$\boxed{1}$ El aprendizaje en tres etapas (Jerome Bruner)

(1)

Concreto

$\boxed{1}$ El aprendizaje en tres etapas (Jerome Bruner)

¿Cuántas manzanas hay?



(2) Pictórico (Gráfico)

Fundamentos metodológicos

$\boxed{1}$ El aprendizaje en tres etapas (Jerome Bruner)

(3)

$$27 + 5 = 30 + 2 = \boxed{}$$

$$\downarrow$$

$$3 + 2$$

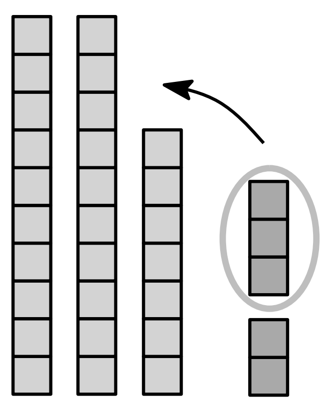
Abstracto

CPA

Fundamentos metodológicos

$\boxed{2}$ El aprendizaje de los procedimientos y la comprensión de los conceptos deben trabajarse en paralelo.

Richard Skemp: Relational understanding and instrumental understanding (1976)



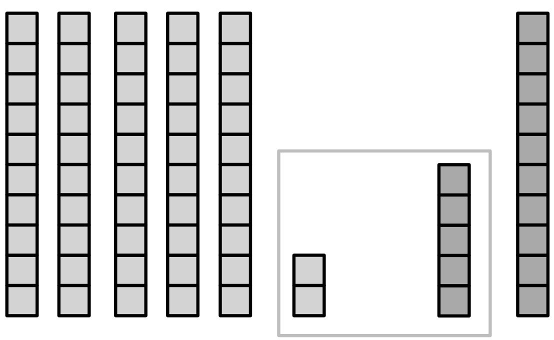
$$27 + 5 = 30 + 2 = \boxed{}$$

$$\underset{3+2}{\downarrow}$$

Fundamentos metodológicos

$\boxed{3}$ Variedad en las presentaciones (Zoltan Dienes)

La comprensión de un concepto es mejor si se presenta desde distintos puntos de vista.



$$52 + 15 = \boxed{}$$

Fundamentos metodológicos

$\boxed{4}$ El andamiaje y la zona de desarrollo próximo (Vygotsky)

En lugar de ir diciendo al alumno "esto se hace así", se le proponen actividades que estén en su zona de desarrollo próximo.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{\square}{6}+\frac{\square}{6}=\frac{\square}{6}$$

Fundamentos metodológicos (resumen)

- El aprendizaje en tres etapas (Jerome Bruner)
- El aprendizaje de procedimientos y la comprensión de los conceptos deben ir en paralelo (Richard Skemp)
- La importancia de la variedad en las presentaciones (Zoltan Dienes)
- El andamiaje y la zona de desarrollo próximo (Lev Vygotski)

Y un elemento adicional:

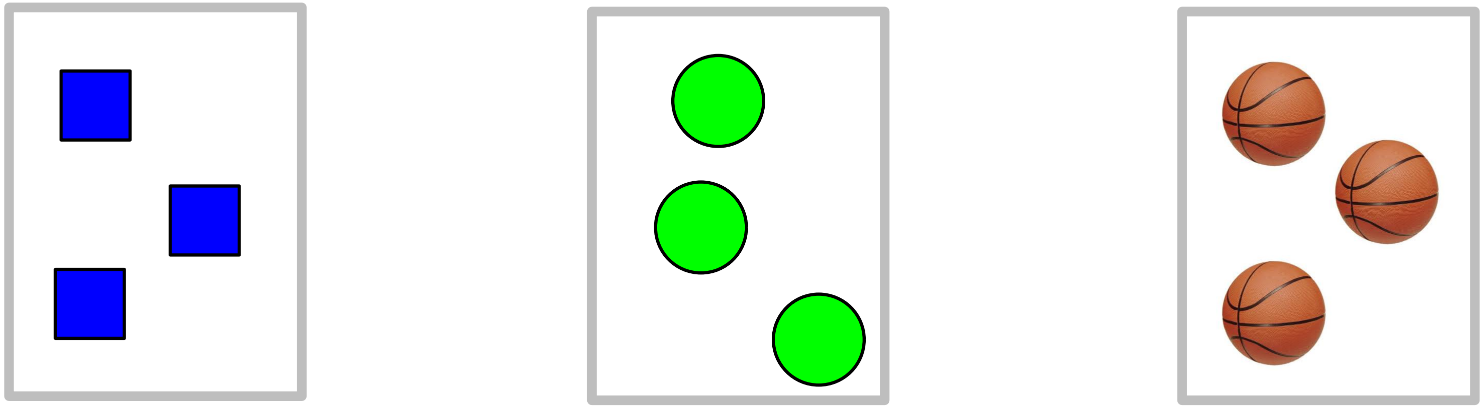
- La importancia de la verbalización.

Los inicios con los números

* En este curso nos vamos a centrar en la aritmética.
* ¿Cuál es (o debería ser) el objetivo fundamental de aprendizaje (sobre números) durante la educación infantil?
* El desarrollo del sentido numérico.
* ¿Qué es el número tres?

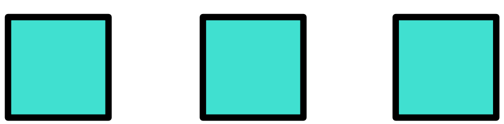
* Es un trabajo que hay que hacer (en cantidad adecuada) pero que no tiene contenido matemático.
* Aprender a contar (memorizar la secuencia numérica) es una actividad que es mejor trabajar dotándola de contenido.

Los inicios con los números - El sentido numérico



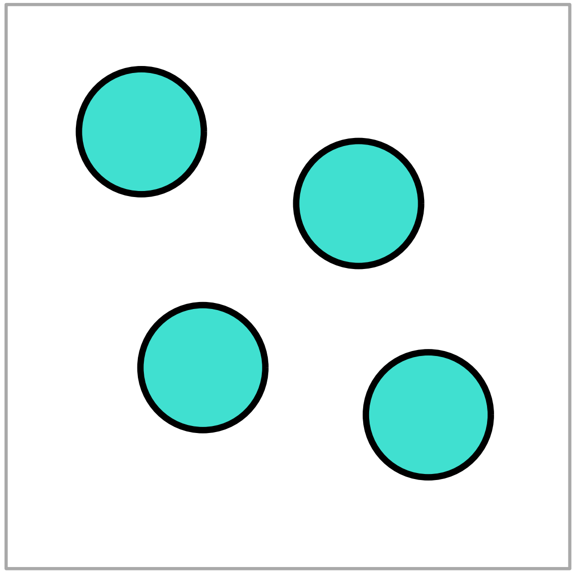
* El concepto de tres es "lo que tienen en común" estos conjuntos.

* Una dificultad de aprendizaje común en las primeras etapas: asignar el "tres" al tercer elemento, en lugar de al cardinal del conjunto.



¿cómo evitarla?

La subitización

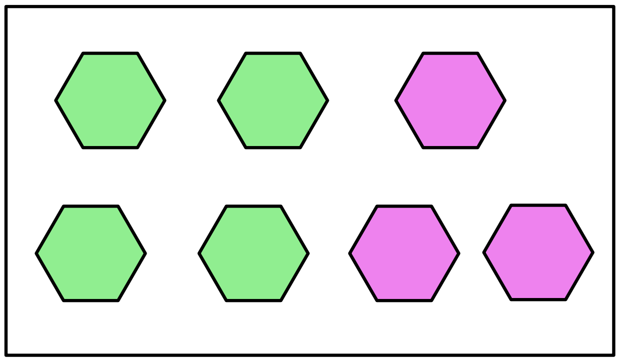


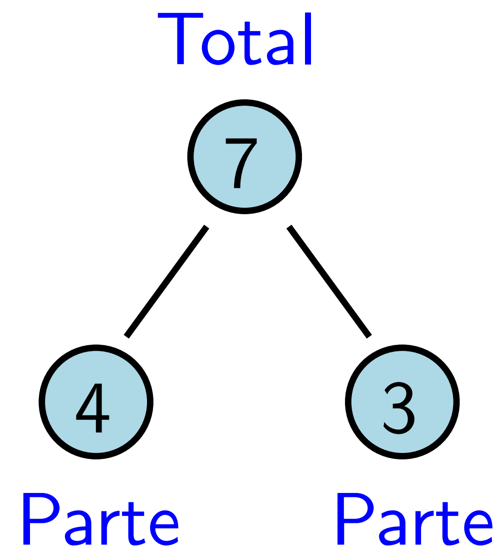
"contar sin contar"

* Es una habilidad que conviene trabajar (con actividades adecuadas a la madurez de los alumnos, por supuesto).

* También puede ayudar para trabajar la descomposición de los números.

Los números conectados



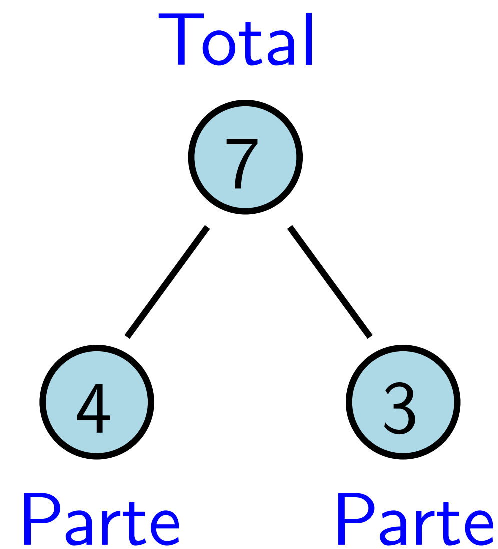


“number bonds”

cuatro y tres son siete

(esto debería ser previo a la suma)

Números conectados y policubos



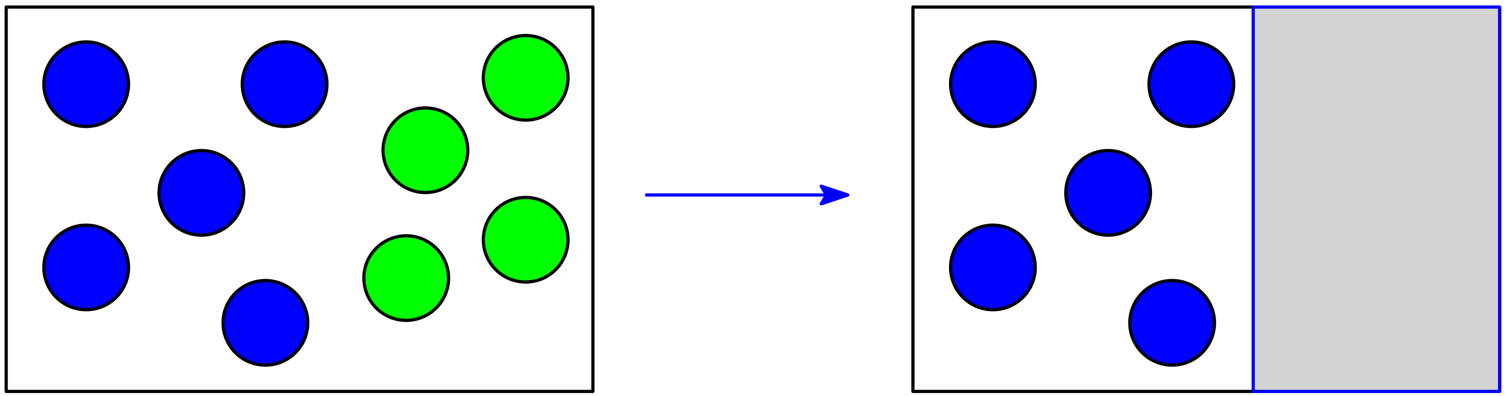
Herramienta virtual (gratuita)

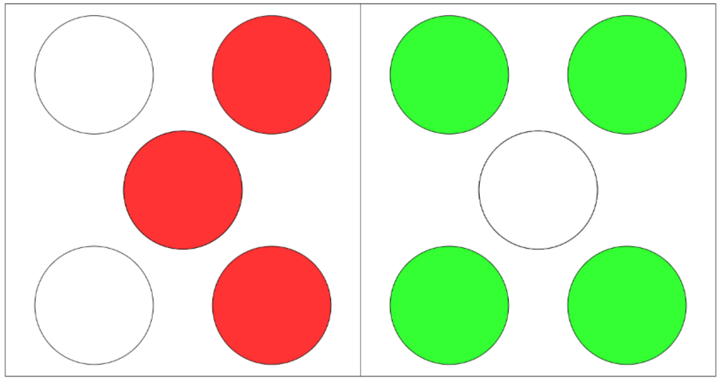
https://www.didax.com/apps/unifix/

Regletas

Descomposiciones numéricas

* Muy importante trabajarlas en profundidad.



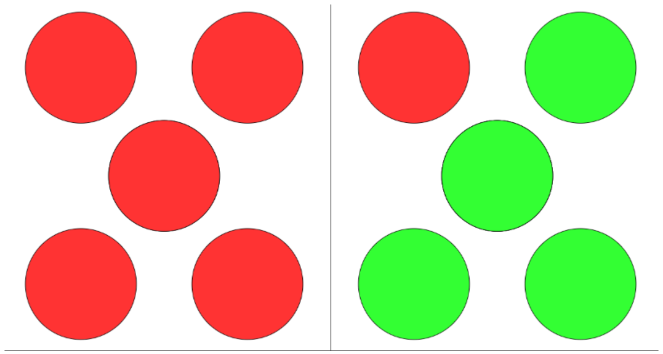


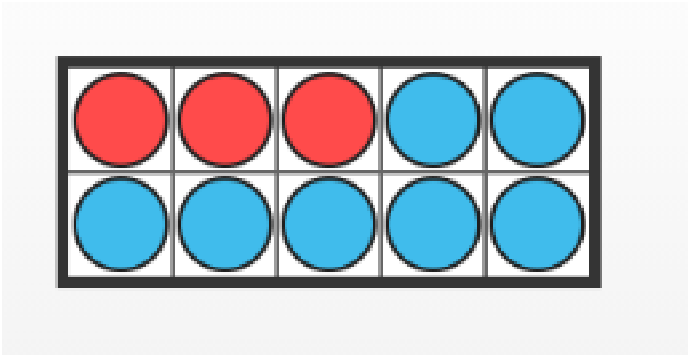
Rejilla húngara

https://mathsbot.com/manipulatives/hungarianFrame

Descomposiciones del 10

* Serán especialmente importantes cuando los números crezcan.





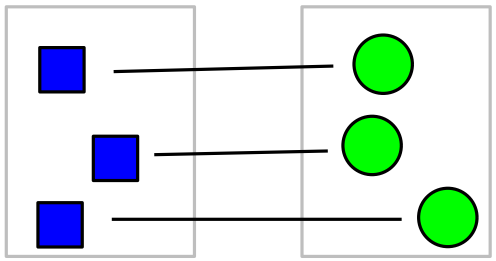
https://www.mathlearningcenter.org/resources/apps

Comparar conjuntos

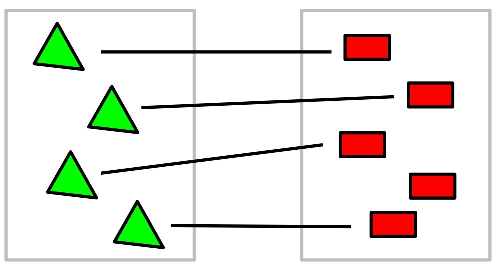
* Importante para el desarrollo del sentido numérico.

$\boxed{1}$ ¿Hay los mismos?

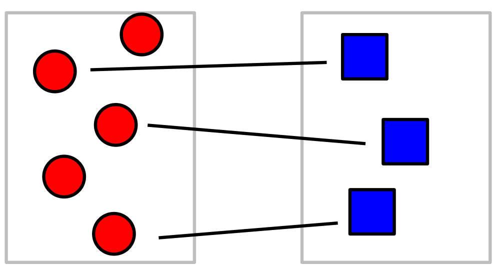
a)



b)

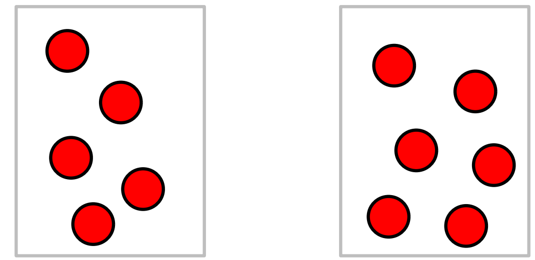


c)

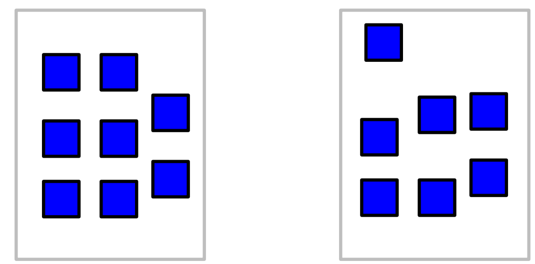


$\boxed{2}$ ¿Dónde hay más?

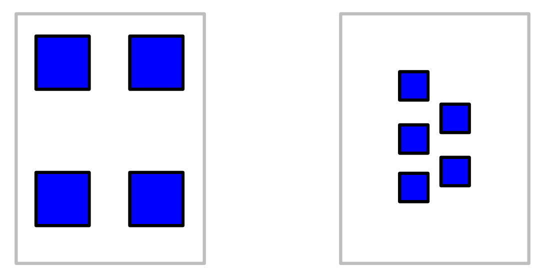
a)



b)



c)



De https://masideas-menoscuentas.com/2014/09/04/libro-de-1o-de-primaria/

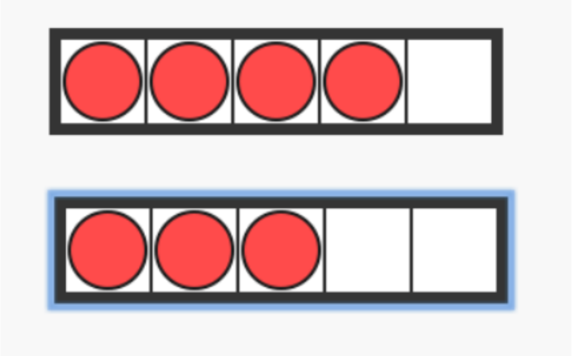
Materiales

policubos

cubos encajables

Estrategias de iniciación a la suma

* Rejillas numéricas
(grupos de 5).



* Otras estrategias: usar los dobles, la compensación ...
* El uso de materiales es fundamental.

$$4 + 5 = 4 + 4 + 1 =$$

$$5 + 3 = 4 + 4 =$$

Formas de sumar

1. Sumar contando.
   a) contar todo.
   b) contar desde un sumando – el mayor.

2. Sumar sin contar.

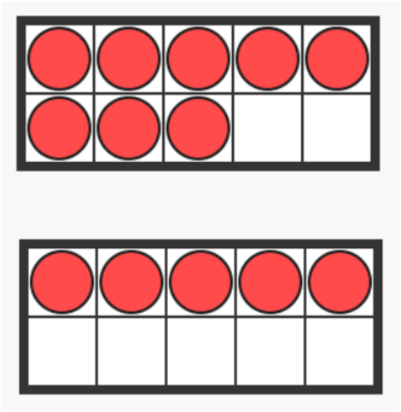
   Fundamental desarrollar estrategias antes de empezar con el algoritmo tradicional.

   Hay que trabajarlo de forma gradual, primero hasta el 10.

Actividad: suma de dos números de una cifra

* Pensar diferentes estrategias para calcular $8+5$.

$8+5=$ “diez y tres”

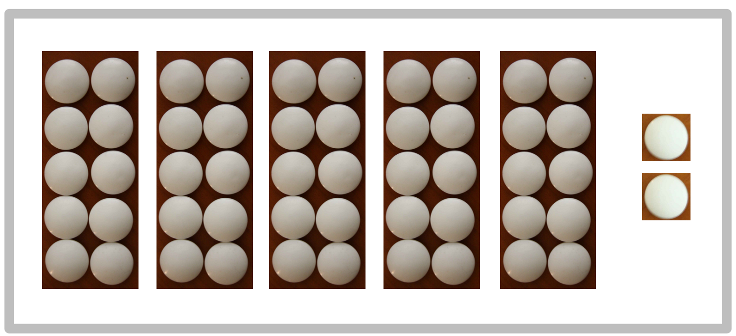


https://www.mathlearningcenter.org/resources/apps

El número de dos cifras

* Enfoque "tradicional": ábaco y fichas de colores

* Alternativa: hacemos grupos de diez.
  Los materiales, de nuevo fundamentales.



_____ decenas y _____ unidades

El número de dos cifras

* Bloques de base 10

* Una alternativa online:
  https://apps.mathlearningcenter.org/number-pieces/

Algoritmos de la suma

* ¿Qué algoritmos para la suma son útiles si creemos que el aprendizaje de los procedimientos y la comprensión de los conceptos deben trabajarse en paralelo?

* Primero, lo que no me parece una buena alternativa.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1\ \ } \\ 5\ 7\ 4 \\ +\ 3\ 6\ 9 \\ \hline 9\ 4\ 3 \end{array}$$

Algoritmos de la suma

* Hay formas muy distintas de presentar el "algoritmo tradicional".

* Calcula $37 + 29$.

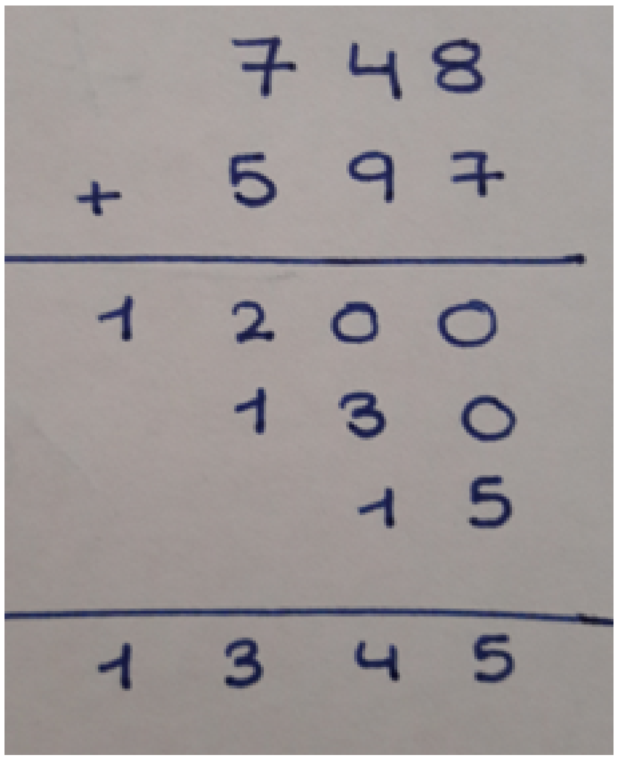
Actividad

* Utilizar los bloques de base 10 para calcular estas sumas, haciendo con los materiales los reagrupamientos (llevadas) necesarios.

$$\begin{array}{r} 47 \\ +\,25 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 363 \\ +\,174 \\ \hline \end{array}$$

Algoritmos de la suma

* Y hay algoritmos “alternativos”:



36 + 43		
	Quedan	Suma
	36	43
6	30	49
1	29	50
9	20	59
20	0	79

ABN

* Temas para la reflexión: ¿ventajas e inconvenientes? ¿Es necesario el estudio de un algoritmo “formal”?

La resta

"De 8 quitamos 5"

"Del 6 al 9 van ..."

∗ Hay que trabajar los dos significados.

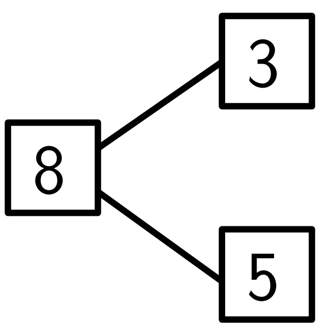
Formas de restar

1. Restar contando.
   a) restar quitando.
   b) contar desde el menor.

2. Restar sin contar.

   Fundamental desarrollar estrategias antes de empezar con el algoritmo tradicional.

* La conexión con la suma es fundamental.
* Los números conectados son una herramienta muy útil.

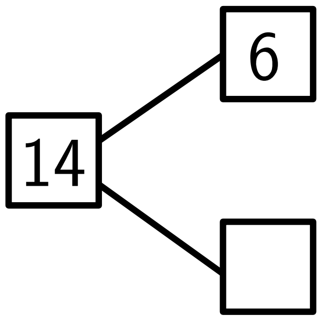


$$3 + 5 = 8 \qquad 8 - 5 = 3$$

$$5 + 3 = 8 \qquad 8 - 3 = 5$$

Actividad

$\ast$ Pensar estrategias para calcular $14 - 6$ (sin contar).



$$14 - 6 =$$

$$4 \qquad 2$$

“Quitar de 10”

$$14 - 6 =$$

$$4 \qquad 10$$

$$10 - 6 = 4$$

$$4 + 4 = 8$$

Algoritmos para la resta

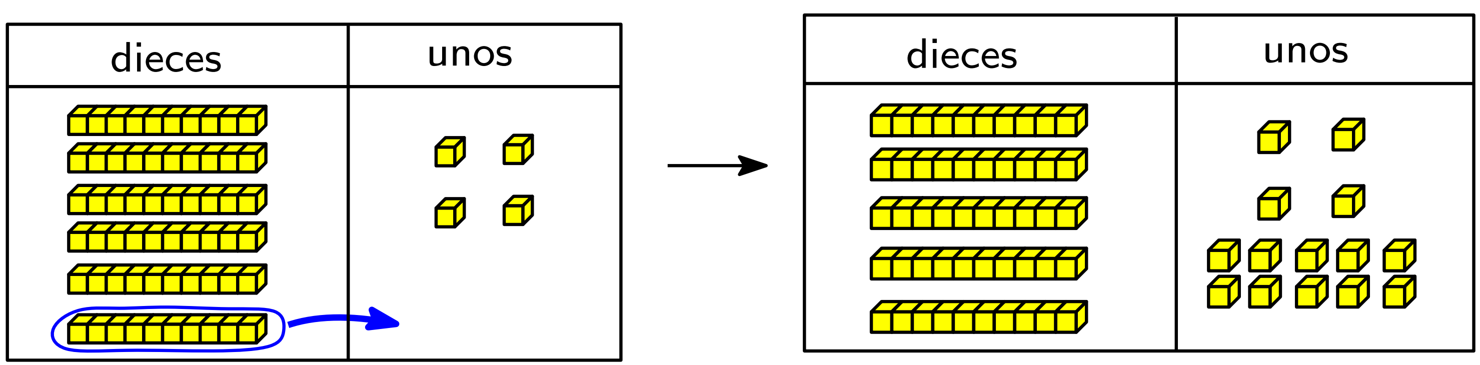
El algoritmo tradicional
(en España)

$$\begin{array}{rcc} & 6 & 4 \\ - & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 6 \end{array}$$

* Una alternativa (ya bastante extendida en nuestras aulas):

$$\begin{array}{rcc} & 6 & 4 \\ - & 4 & 8 \\ \hline & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcc} & \overset{5}{\cancel{6}} & \overset{14}{\cancel{4}} \\ - & 4 & 8 \\ \hline & & \end{array}$$



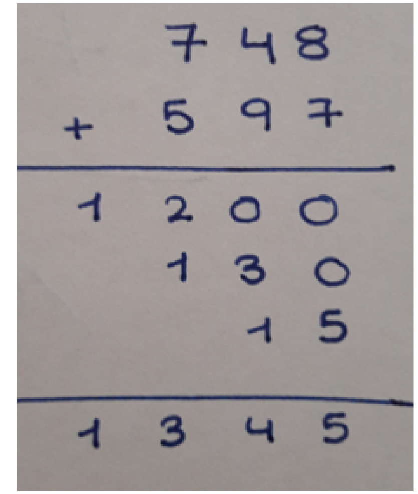
Actividad

* Utilizar los bloques de base 10 para calcular estas restas, haciendo con los materiales los reagrupamientos necesarios.

$$\begin{array}{r} 5\ 3 \\ -\ \ 1\ 8 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 4\ 0\ 3 \\ -\ \ 1\ 3\ 7 \\ \hline \end{array}$$

¿Algoritmos alternativos?

* ¿Existe para la resta un análogo de este algoritmo para la suma?



* Algoritmo ABN para la resta.

$437 - 248$		
Quito	Quedan	Restan
8	240	429
29	211	400
100	111	300
11	100	289
100	0	189

$437 - 248$	
Pongo	Tengo
12	260
100	360
40	400
30	430
7	437

¿Y el “cálculo mental”?

* Los números conectados y la recta numérica vacía son excelentes herramientas para desarrollar estrategias de cálculo flexible.

* Piensa diferentes estrategias para calcular:

a) $123 + 45$

c) $145 - 28$

b) $98 + 137$

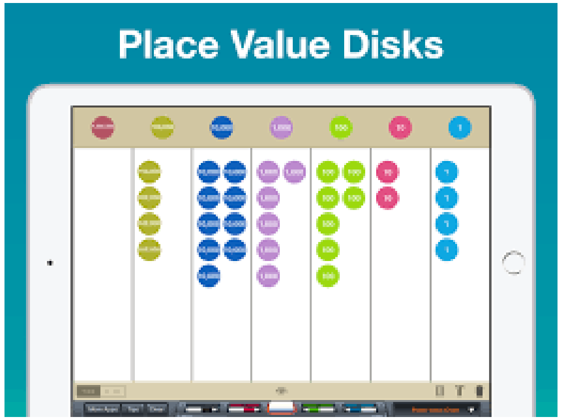
d) $203 - 106$

En 3.º, el grupo de mil

* Representar los números de 4 cifras con los bloques de base 10 empieza a ser poco manejable.

  Es prematuro prescindir de un apoyo en la representación (al menos para algunos alumnos).

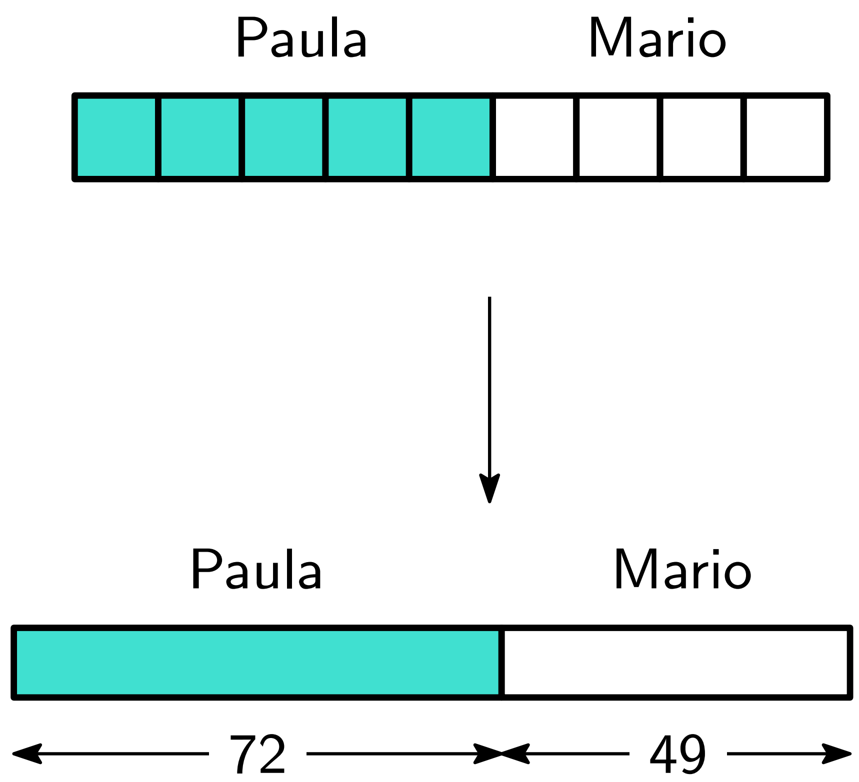
* Las fichas numéricas (number disks) son una buena alternativa.



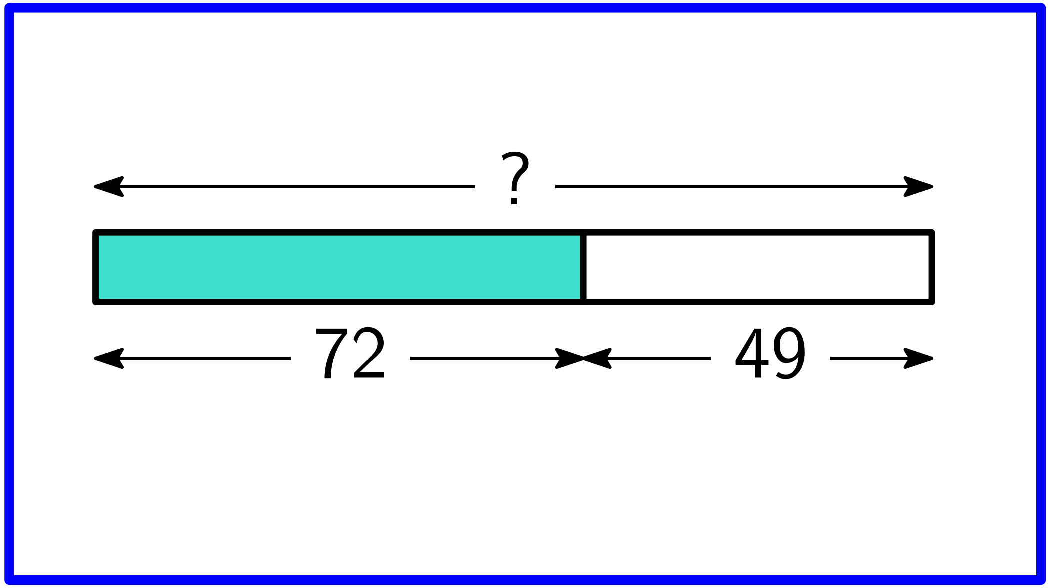
Resolución de problemas

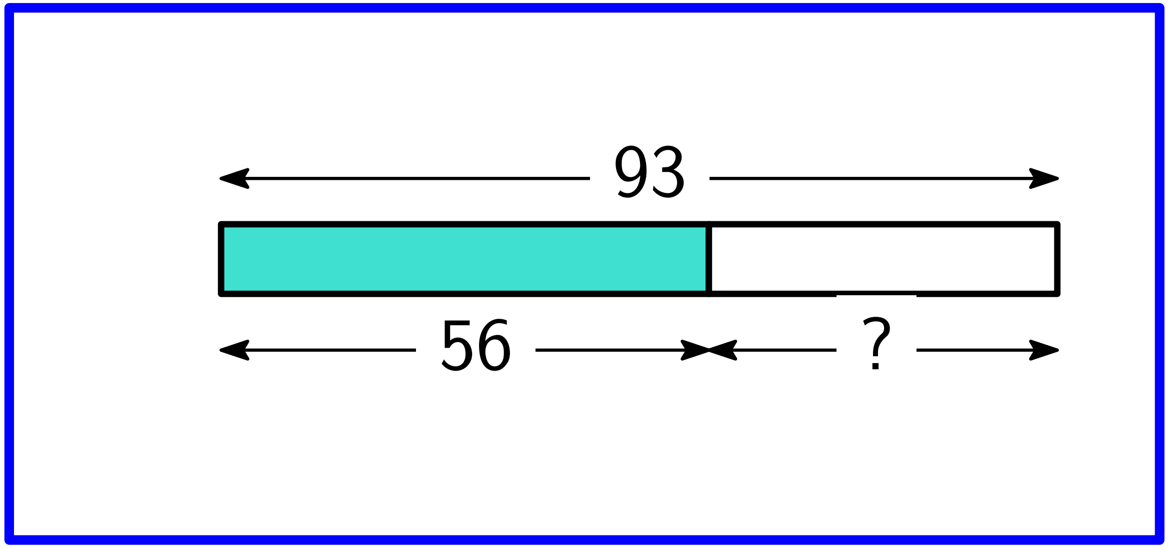
* Y este problema ... ¿es de sumar o de restar?

* Una herramienta muy útil: el modelo de barras.



Partes - Total





Observaciones

* Para que el modelo sea efectivo hay que introducirlo y trabajarlo adecuadamente.

* En el paso de representar 15 unidades explícitamente a representarlas con una barra hay una abstracción a la que hay que prestar la atención necesaria.

* En este modelo el alumno se centra en las relaciones, no en los objetos ni en las cantidades descontextualizadas.

* Los objetos son representados mediante rectángulos, un rectángulo es un objeto fácil de dibujar, de dividir. Útil para representar números más grandes y mostrar relaciones de proporcionalidad.

Modelo de comparación

* Rosa tiene 35 euros. Sabemos que Rosa tiene 14 euros más que Luis. ¿Cuánto dinero tiene Luis?

Problemas

1. Ana ha comprado una caja con 345 caramelos, María ha comprado otra caja que tiene 230 caramelos más.
   a) ¿Cuántos caramelos tiene la caja de María?
   b) ¿Cuántos caramelos tienen entre las dos?

2. Un pastelero ha hecho 35 bollos rellenos de chocolate, y también ha hecho bollos rellenos de crema. Sabemos que ha hecho 19 bollos de chocolate más que bollos de crema.
   a) ¿Cuántos bollos de crema ha hecho el pastelero?
   b) ¿Cuántos bollos ha hecho en total?

3. Jaime tiene 15 euros más que Lucía y entre los dos tienen 97 euros. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

3. Jaime tiene 15 euros más que Lucía y entre los dos tienen 97 euros. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

Problemas

1. Luis tiene 316 euros y su amiga Marta tiene 488 euros. ¿Cuánto tiene que darle Marta a Luis para que los dos se queden con la misma cantidad de dinero?
2. Tengo 765 euros y quiero repartirlos entre Alicia y Benito, de manera que Alicia reciba el doble que Benito. ¿Cuánto dinero recibirá cada uno?
3. Lisa tiene 128 euros y Pablo tiene 97 euros. Se compraron dos abrigos iguales, y después de pagar Lisa tenía el doble de dinero que Pablo. ¿Cuánto les costó el abrigo?

Dificultades en la resolución de problemas

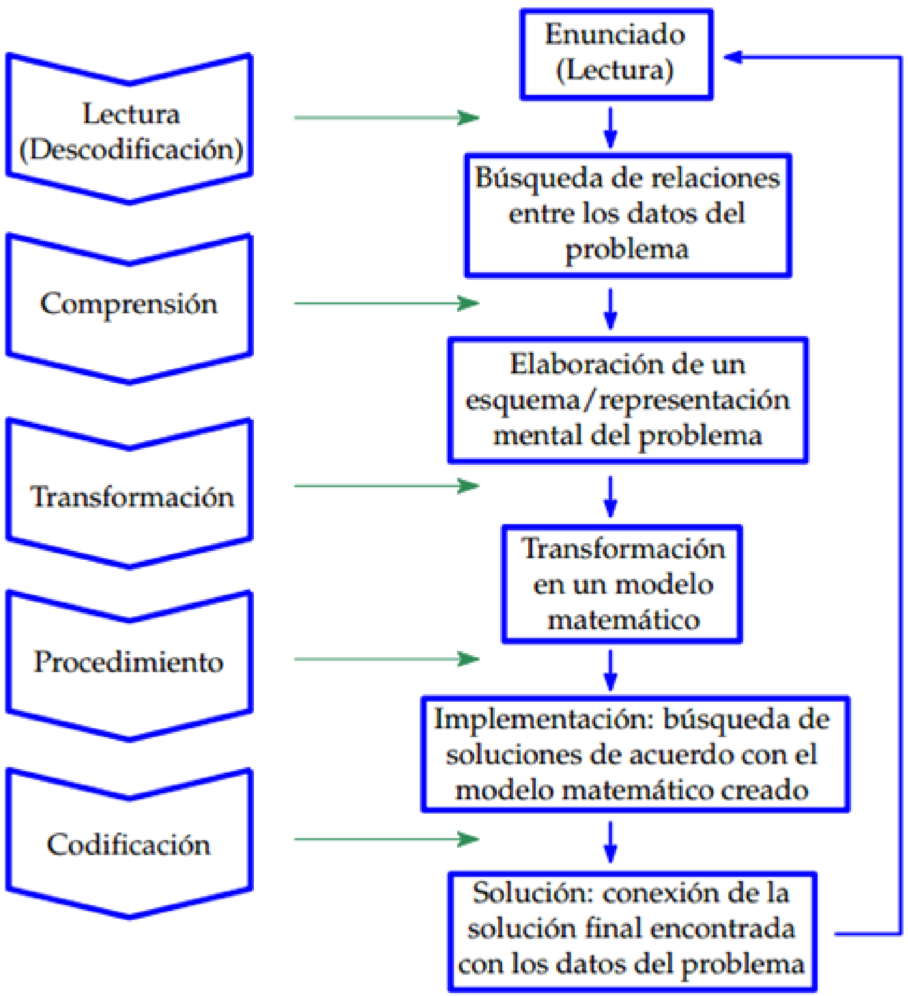


Figura 2.2: Jerarquía de errores de Newman integrada con las fases de resolución de problemas.

Arántzazu Fraile Rey: El desarrollo de actitudes valiosas para la resolución de problemas en Educación Primaria. Tesis Doctoral. Universidad de Alcalá

La multiplicación

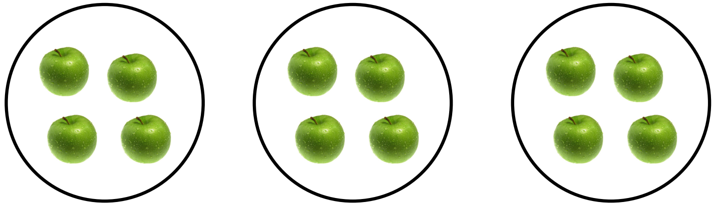
* ¿Cómo se puede introducir?

* Una opción: “multiplicado por”

$$3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3$$

* La alternativa: “veces”

3×4 significa 3 veces 4



$$3 \times 4 = 4 + 4 + 4$$

Veces $\leftrightarrow$ Multiplicado por

* A nivel internacional, no hay mayoría clara.

* Controversia en el periódico.
  ¿Por qué no es lo mismo 5×3 que 3×5?

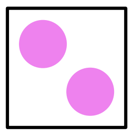
http://verne.elpais.com/verne/2015/10/31/articulo/1446292466_

* La ventaja de usar "veces": inmediato de entender.

* Pero, ojo: "veces" y las tablas de multiplicar.

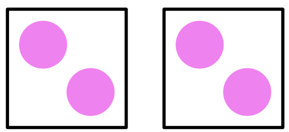
* Lo más importante: evitar contradicciones.
  ¿El doble de 6?

Aprendizaje comprensivo $\leftrightarrow$ Memorización



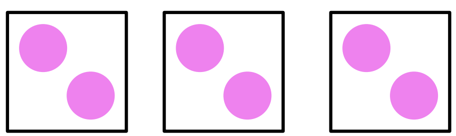
$1 \times 2 = 2$

1 grupo de 2 es 2
1 vez 2 es 2



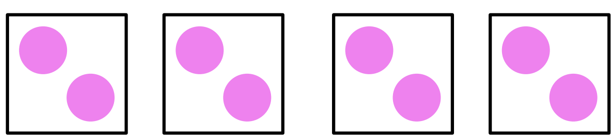
$2 \times 2 = 4$

2 grupos de 2 son 4
2 veces 2 son 4



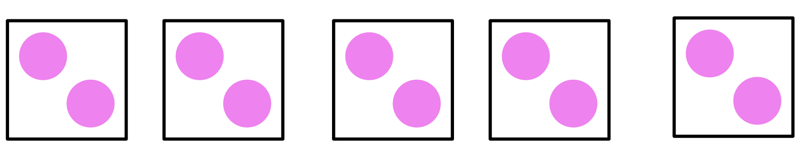
$3 \times 2 = 6$

3 grupos de 2 son 6
3 veces 2 son 6



$4 \times 2 = 8$

4 grupos de 2 son 8
4 veces 2 son 8



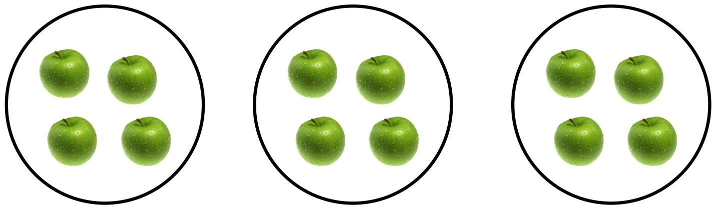
$5 \times 2 = 10$

5 grupos de 2 son 10
5 veces 2 son 10

$*$ ¿Aprender de memoria o aprender con la memoria?

Modelos de la multiplicación

1. Suma repetida.



$$3 \times 4 = 4 + 4 + 4$$

tres grupos de cuatro

tres veces cuatro

$*$ Es el significado más adecuado para la introducción de la multiplicación.

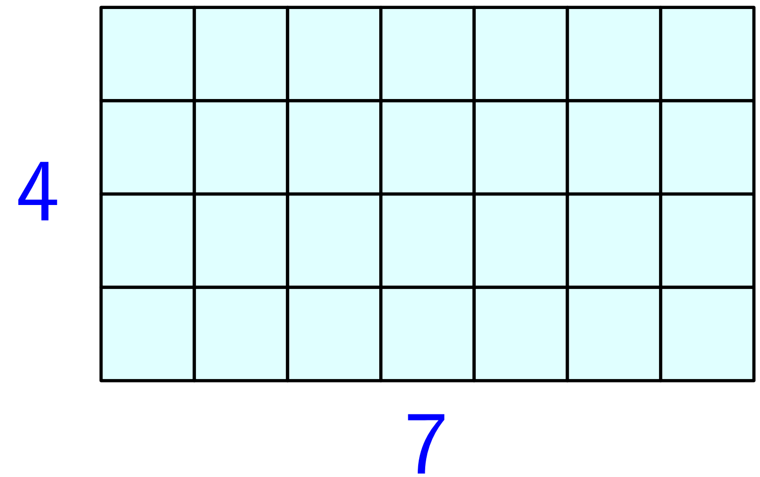
- intuitivo
- conexión con la suma, ya conocida

Modelos de la multiplicación

2. Modelo de área.

4×7

7×4



a) Muy útil para entender varias propiedades de la multiplicación.
b) Conexión con la geometría.

Modelos de la multiplicación

3. Modelo de proporcionalidad, escalado.

Multiplicado por: si leemos 5×2 como "cinco multiplicado por dos", ¿qué significa?

a) Conexión con la división: multiplicar por 3, operación inversa a dividir entre 3.

Modelos de la multiplicación

4. Modelo combinatorio.

   Si tengo 3 pantalones y 4 camisetas, ¿de cuántas formas distintas puedo vestirme?

   a) Es un modelo importante en resolución de problemas y con varias aplicaciones.
   b) Accesible a los alumnos desde el principio de primaria.
   c) Poco trabajado en España.

∗ Una página con ideas muy interesantes para trabajar el pensamiento multiplicativo:

https://gfletchy.com/2019/03/17/multiplication-subitizing-cards/

Problemas

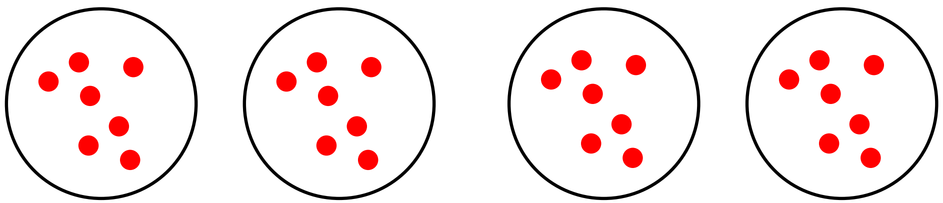
* ¿Cuántos números de 3 cifras empiezan por una cifra impar y son múltiplos de 5?

* En una matrícula de un coche, ¿qué es más probable, que haya alguna cifra repetida, o que todas las cifras sean distintas?

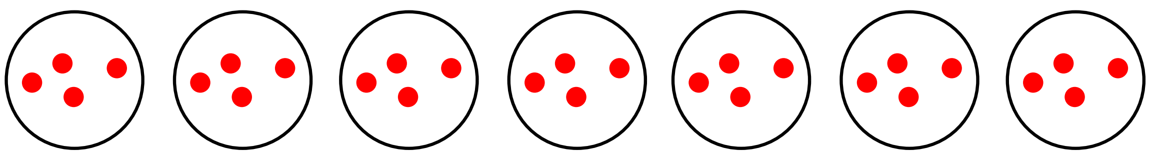
Propiedades de la multiplicación

* Conmutativa

* Ojo: no es nada intuitivo que 4 veces 7 sea igual que 7 veces 4 ....

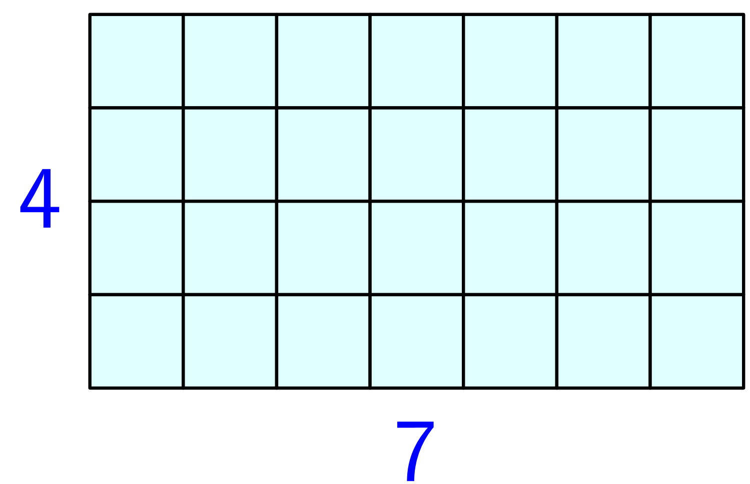


4 veces 7 $\leftrightarrow 4 \times 7$



7 veces 4 $\leftrightarrow 7 \times 4$

* Modelo de área.



Propiedades de la multiplicación

* Propiedad distributiva

* ¿Qué sentido tiene en primaria?

* En los libros de texto ...

$$7 \times (3+5) \quad = \quad 7 \times 3 + 7 \times 5$$

$$7 \times 8 \qquad\qquad 21 \; + \; 35$$

$$56 \qquad\qquad\qquad 56$$

Propiedad distributiva

$*$ Fundamental para:

i) manipulaciones algebraicas: $2(x+3) = 2x+6$

ii) cálculo natural (pensado, mental):

$12 \times 7 =$

iii) algoritmo tradicional (y otras variantes) de la multiplicación.

Hacia el algoritmo de la multiplicación

* Una cuestión previa: $8432 \times 10 = 84320$

¿Por qué?

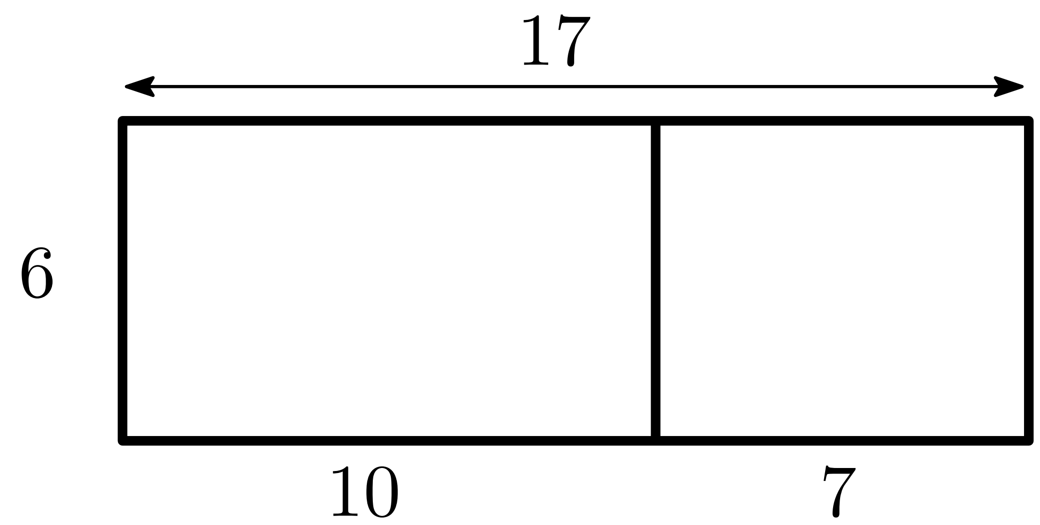
Algoritmo de la multiplicación: introducción

* Los materiales (en particular, los bloques de base 10) siguen siendo muy útiles.

El modelo de área

* Una excelente ayuda para la comprensión de las propiedades y para la introducción del algoritmo.

$$6 \times 17 = 6 \times 10 + 6 \times 7$$



$$\begin{array}{ccc} & 1 & 7 \\ & \times & 6 \\ \cline{2-3} & 4 & 2 \\ + & 6 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 \end{array}$$

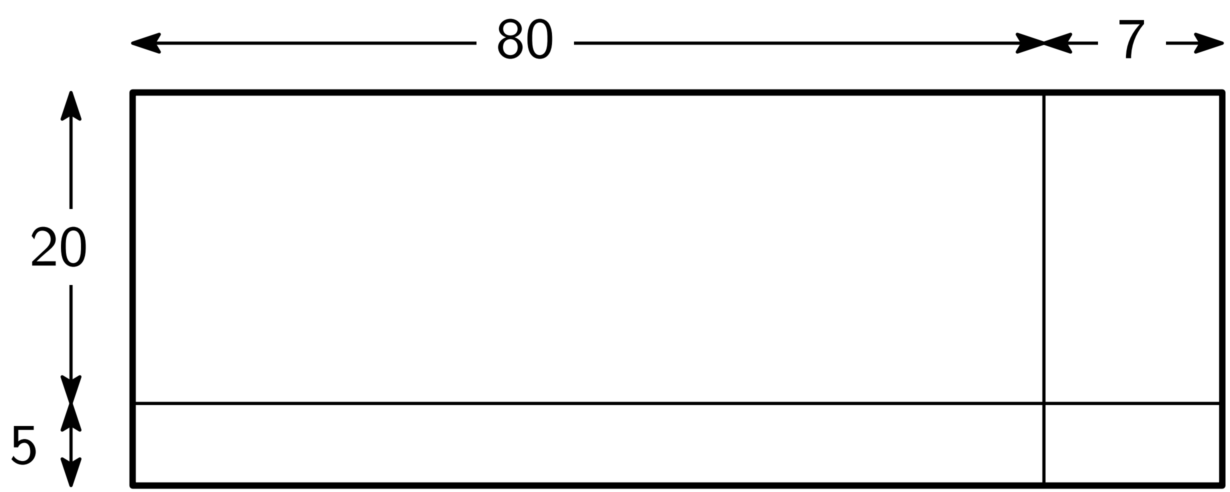
Algoritmos de la multiplicación

* ¿Y si queremos multiplicar por un número de dos cifras?

* Una idea: usar el modelo de área.
(El vídeo enlazado es de la Khan Academy.)

$$\begin{array}{rrrrr} & & & 8 & 7 \\ & & \times & 2 & 5 \\ \hline & & & 3 & 5 \\ & & 4 & 0 & 0 \\ & & 1 & 4 & 0 \\ + & 1 & 6 & 0 & 0 \\ \hline & 2 & 1 & 7 & 5 \end{array}$$

$$(80+7)\times(20+5)=$$



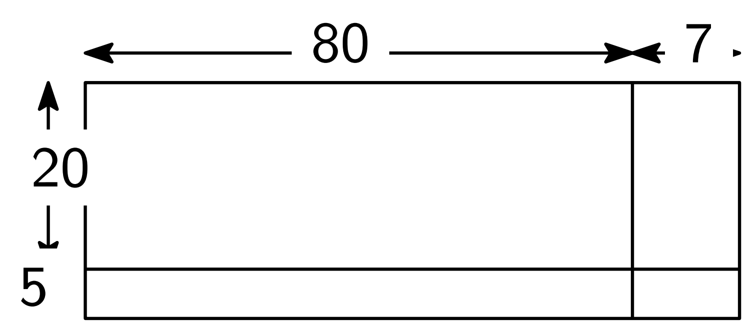
Algoritmos de la multiplicación

El tradicional explicado

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & & 8 & 7 \\
 & & \times & 2 & 5 \\
\hline
 & & 4 & 3 & 5 \\
+ & 1 & 7 & 4 & \boxed{0} \\
\hline
 & 2 & 1 & 7 & 5
\end{array}
$$

Productos parciales

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & & 8 & 7 \\
 & & \times & 2 & 5 \\
\hline
 & & & 3 & 5 \\
 & & 4 & 0 & 0 \\
 & & 1 & 4 & 0 \\
+ & 1 & 6 & 0 & 0 \\
\hline
 & 2 & 1 & 7 & 5
\end{array}
$$



Problema (3º Primaria)

* Nos dicen que Juan pesa 5 veces más que su perro, y que entre los dos pesan 42 kg. ¿Cuánto pesa cada uno?

La división

* “Dividir es repartir”. ¿Siempre?

1) Luis lleva 20 caramelos al colegio y quiere repartirlos entre 4 amigos. ¿Cuántos caramelos le da a cada amigo?
2) Luis tiene 20 caramelos y hace bolsas con 4 caramelos. ¿Cuántas bolsas puede hacer?

* El segundo significado es la división de agrupamiento.
  Tiene el sentido de “hacer grupos iguales”.
  (No se trabaja lo suficiente en nuestras aulas).
  Relación con medida: ¿cuántas veces “cabe” 4 en 20?

Inventa dos problemas

entradas
de
cine

camisetas

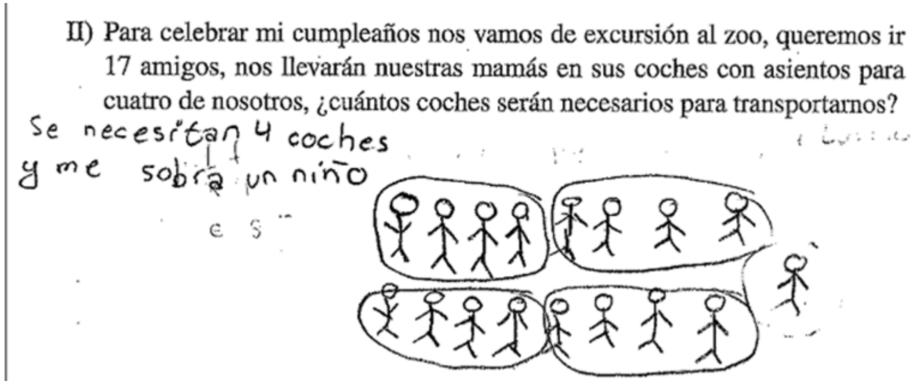
96 euros

16

* En uno de ellos, la división debe tener sentido de reparto; en el otro, de hacer grupos.

División: el procedimiento y su interpretación

- El error en nuestras aulas: nos centramos en el algoritmo, y nos olvidamos de darle significado.



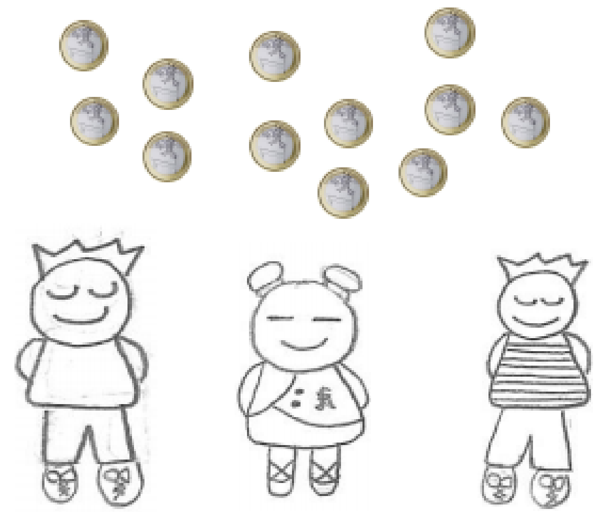
- Un ejemplo de pregunta de TIMSS (4° de primaria)

La pintura viene en latas de 5 litros. Santi necesita 37 litros de pintura. ¿Cuántas latas debe comprar?

- 5
- 6
- 7
- 8

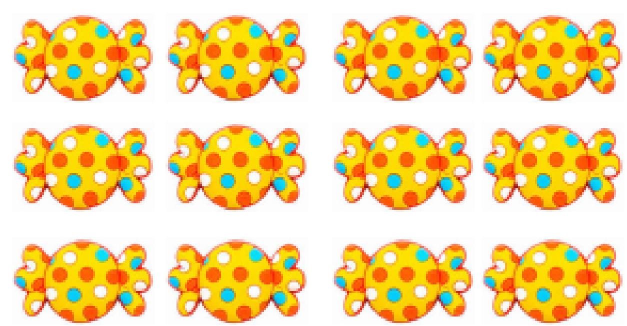
Introducción de la división

$\boxed{1}$ Agrupa las monedas de la figura, para repartirlas por igual entre los tres amigos.



$$12 : 3 = 4$$

e) Con los caramelos de la figura, hacemos bolsas con 4 caramelos cada una.



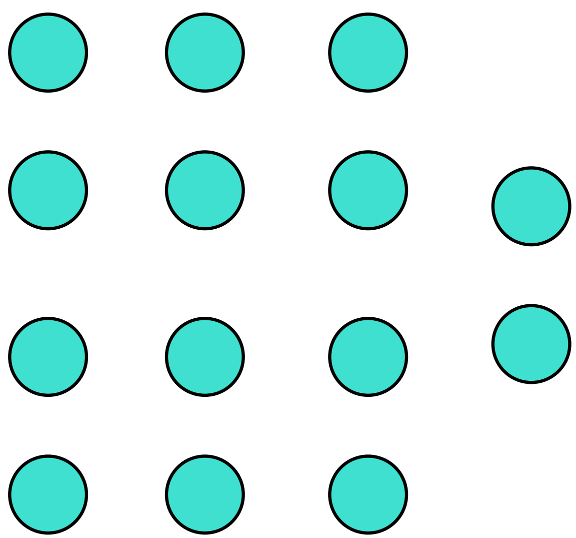
Necesitamos $\square$ bolsas

$$12 : 4 = 3$$

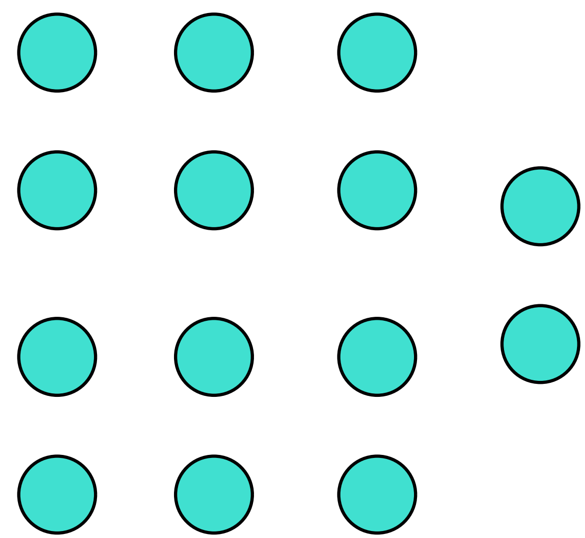
Introducción a la división

* Con los puntos de las figuras:
  1. Haz dos grupos iguales.
  2. Haz grupos de dos.

$\boxed{1}$



$\boxed{2}$



Multiplicación y división

* Es importante trabajar la relación entre multiplicación y división, como operaciones inversas.

División con resto

* División entera (con resto, o euclídea)

  Dados dos números naturales D (dividendo) y d (divisor), existen unos únicos números naturales c (cociente) y r (resto) tales que

$$D = c \times d + r \ \text{ y } \ 0 \leq r < d.$$

* Idea de cualquier algoritmo de división:

  Aproximar por defecto el dividendo por múltiplos del divisor.

$$16 = \boxed{} \times 3 + \underset{\substack{\wedge \\ 3}}{\boxed{}}$$

$$D = c \times d + r$$

* Ventajas de esta notación:
  * se adapta muy bien al cálculo mental y la estimación:

$$140 = \boxed{} \times 9 + \boxed{}$$

  * ayuda a entender el significado de la división (y de sus resultados, el cociente y el resto)

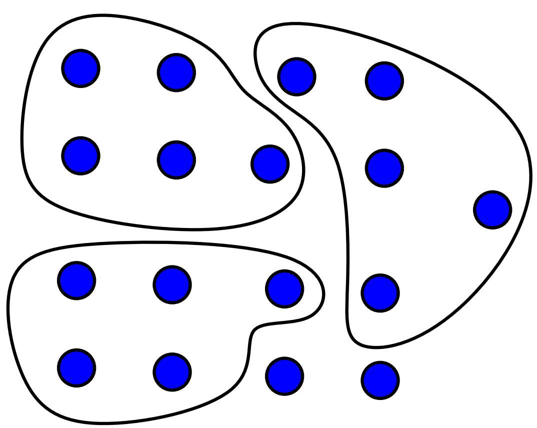
* Problema: Un astronauta empezó su viaje un martes a las 9 de la mañana. Si el viaje duró 115 horas, ¿qué día y a qué hora aterrizó?

* Sabiendo que el 14 de abril de 2021 es miércoles, ¿qué día de la semana será el 14 de abril de 2031?

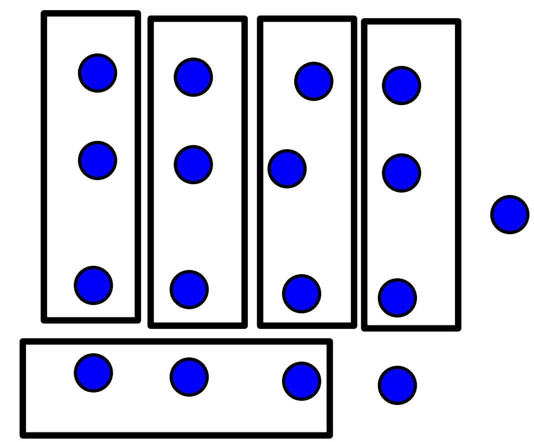
Introducción del algoritmo

* Repartimos 17 caramelos entre 3 amigos.
  1. ¿cuántos caramelos le damos a cada amigo?
  2. ¿cuántos caramelos sobran?

* Con 17 caramelos hacemos bolsas de 3 caramelos.
  1. ¿cuántas bolsas salen?
  2. ¿cuántos caramelos sobran?



$$\begin{array}{r|l} 17 & 3 \\ \cline{2-2} -15 & 5 \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$



¿Notación para la división?

$$\boxed{17 \div 3 = 5\, R\, 2}$$

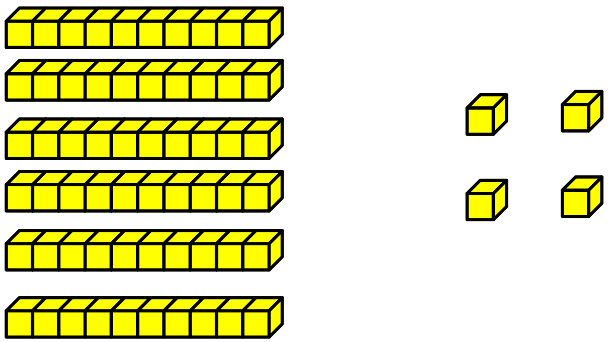
$$17 = 3 \times 5 + 2$$

Algoritmo de la división: introducción

* También aquí debemos apoyarnos en los materiales, al principio.

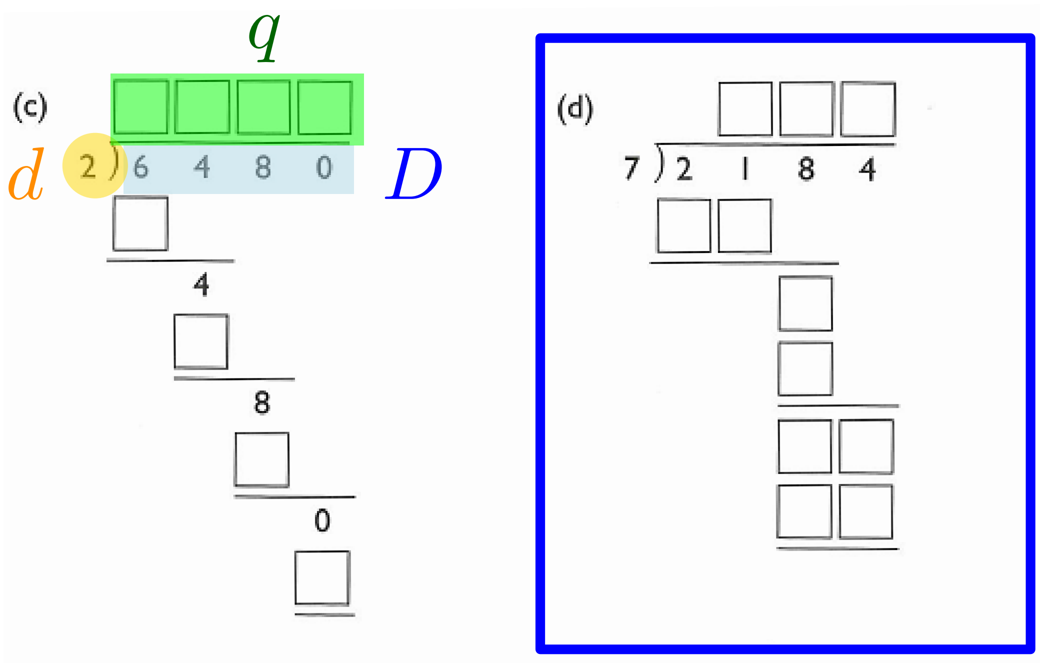
* Queremos hacer la división $64 \div 2$.

  ¿Cómo la interpretamos?



* ¿Y si queremos hacer la división $52 \div 4$?

Divisiones en 4º – Singapur



$$
\begin{array}{r|l}
2\,1\,8\,4 & 7 \\ \cline{2-2}
-\,2\,1 & 3\,1\,2 \\ \cline{1-1}
0\,8 & \\
-\,7 & \\ \cline{1-1}
1\,4 & \\
-\,1\,4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

* Los divisores de dos (o más) cifras han desaparecido del currículo (ya hace algunos años).

Algoritmos de división

* Algoritmo tradicional: dos versiones.

Algoritmo "extendido"

$$
\begin{array}{rrr|rr}
6 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ \cline{4-5}
-4 & 6 & & 2 & 7 \\ \cline{1-2}
1 & 8 & 0 & & \\
-1 & 6 & 1 & & \\ \cline{1-3}
 & 1 & 9 & &
\end{array}
$$

Algoritmo "usual" ("comprimido")

$$
\begin{array}{rrr|rr}
6 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ \cline{4-5}
1 & 8 & 0 & 2 & 7 \\
 & 1 & 9 & &
\end{array}
$$

¿Otros algoritmos?

ABN

Una propuesta

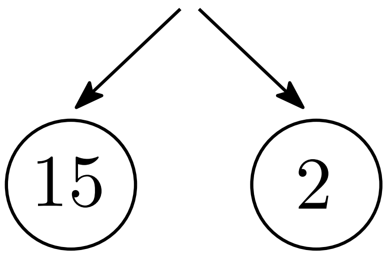
$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & 4 & 2 & 7 & \;1\,5 \\ \cline{5-5}
- & 1 & 5 & 0 & \;1\,0 \\ \cline{1-4}
 & 2 & 7 & 7 & \\
- & 1 & 5 & 0 & \;1\,0 \\ \cline{1-4}
 & 1 & 2 & 7 & \\
- & 1 & 2 & 0 & +\;8 \\ \cline{1-5}
 & & & 7 & \;2\,8
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr|l}
 & 4 & 2 & 7 & \;1\,5 \\ \cline{5-5}
- & 3 & 0 & 0 & \;2\,0 \\ \cline{1-4}
 & 1 & 2 & 7 & +\;8 \\
- & 1 & 2 & 0 & \;2\,8 \\ \cline{1-4}
 & & & 7 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr|l}
 & 4 & 2 & 7 & \;1\,5 \\ \cline{5-5}
- & 3 & 7 & 5 & \;2\,5 \\ \cline{1-4}
 & & 5 & 2 & +\;3 \\
- & & 4 & 5 & \;2\,8 \\ \cline{1-4}
 & & & 7 &
\end{array}
$$

Algoritmo de los “cocientes parciales”

¿Otros algoritmos?

* Basado en las descomposiciones de números:

$$17 \div 3$$



* Haz estos cálculos con los algoritmos indicados:

  i) $147 \div 8$, descomponiendo y con cocientes parciales.

  ii) $1347 \div 26$, con cocientes parciales.

Un problema ¿de 5.º?

* Alicia tiene el triple de dinero que Benito, y Lucía tiene 16 euros más que Benito. Si entre los tres tienen 186 euros, ¿cuánto dinero tiene cada uno?

Un resumen

* En estos vídeos de Graham Fletcher se resumen muy bien las ideas del desarrollo de la multiplicación y la división a lo largo de primaria:

https://vimeo.com/149428217

https://vimeo.com/153668928

Materiales para la reflexión

1. Let's abolish pen and pencil algorithms. A. Ralston, 1999
   Trad: "Por la abolición de las matemáticas de lápiz y papel"

   Tony Martín, Grupo Capicúa:
   https://sites.google.com/site/tonymartincapicua/

   Canal youtube: Antonio Martín 2020

2. Stop teaching calculating, start learning math
   http://goo.gl/sFuVtF (se le pueden añadir subtítulos)

∗ Un vídeo con el desarrollo de los conceptos de división a lo largo de primaria: https://vimeo.com/153668928

Primaria-Secundaria: dos dificultades concretas

* El significado del signo "$=$"

  En la resolución de problemas es usual encontrarse expresiones como

$$7 \times 4 = 28 + 7 = 35$$

* Es importante entender que el signo "$=$" es bidireccional.

* Una idea que puede ayudar. Además de

$$3 + \boxed{} = 8$$

* Proponer también

$$9 = 4 + \boxed{} \qquad 2 + 6 = \boxed{} + 3 \qquad 25 = 7 \times \boxed{} + 4$$

El paso aritmética-álgebra

* La iniciación al lenguaje algebraico se trata en el año K-6 en muchos países.

* Cuentas como

$$\pi + 2\pi = 3\pi$$

son una introducción excelente.

* En Singapur, en los problemas sobre circunferencias y círculos, tratan π de estas tres formas distintas:

a) aproximando $\pi \approx 3{,}14$ (con calculadora).

b) de manera exacta.

c) aproximando $\pi \approx \dfrac{22}{7}$.

La calculadora (y otros dispositivos)

* Está en el currículo, y habría que integrarla en el aula.

aunque solo sea para que no ocurra esto:
https://www.youtube.com/watch?v=zclITKd4ivQ

* Usa tu calculadora para averiguar tu índice de masa corporal.

(La estatura es en metros)

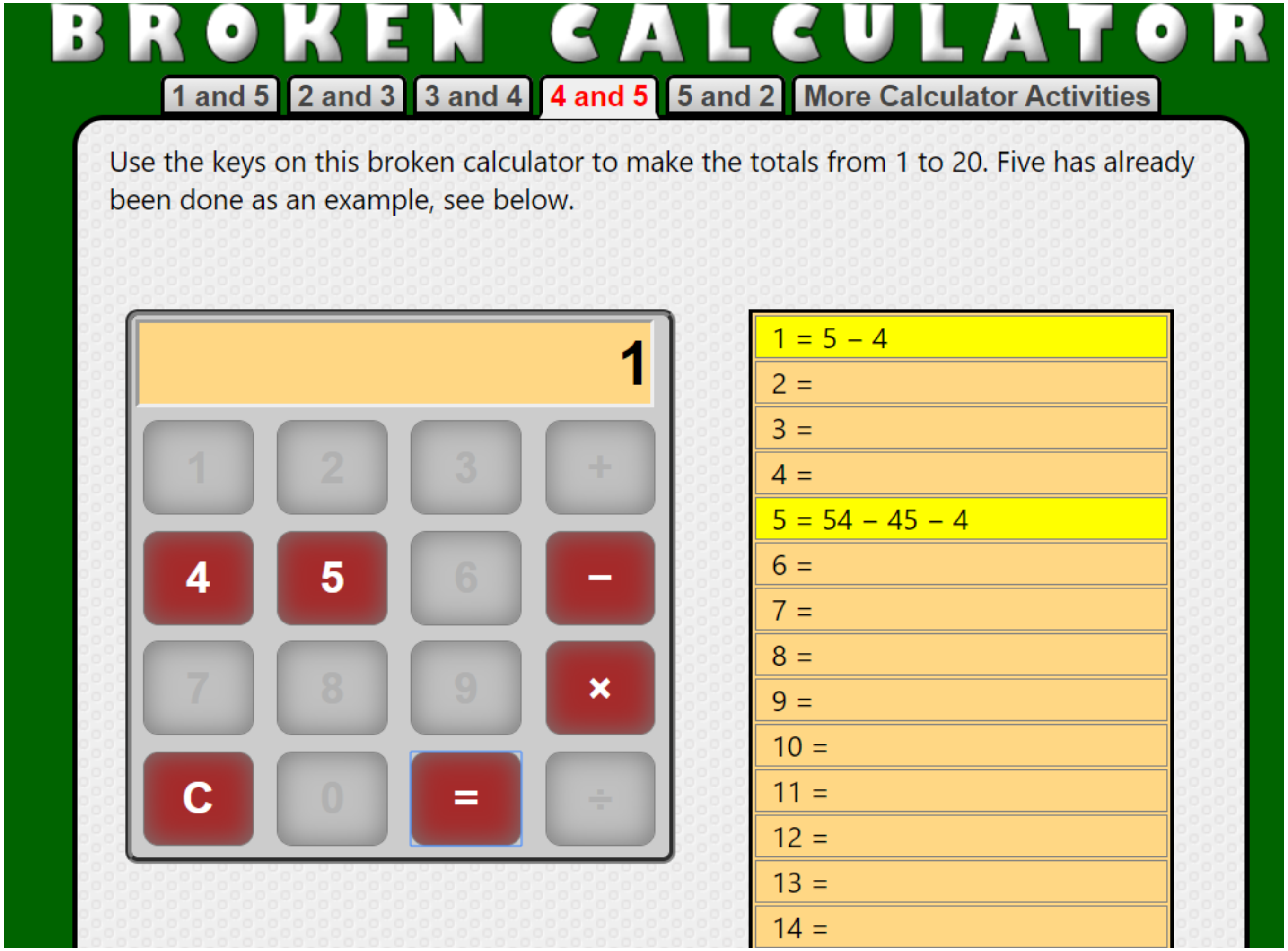
* Dos aspectos distintos:

(1) su uso para hacer operaciones "complicadas", o para comprobar resultados.

(2) su utilidad en el diseño de actividades de aprendizaje.

Un ejemplo de actividad de aprendizaje

* Calculadoras estropeadas.



https://www.transum.org/Software/SW/Starter_of_the_day/Students/Broken_Calculator.asp

Una actividad para la raíz cuadrada

* Con una calculadora como la de la figura, encuentra $\sqrt{325}$ con 2 cifras decimales.

  Repite el ejercicio con $0{,}8$.