

Matemáticas “metodología Singapur”

Pedro Ramos Alonso

Facultad de Educación

Universidad de Alcalá

pedro.ramos@uah.es



<http://masideas-menoscuantas.com/>
@MsIdeasMnosCtas

Este trabajo se distribuye con una licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual CC BY-NC-SA. Los detalles se pueden consultar (en inglés) en este enlace

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>



Contenidos

- ◇ Introducción.
- ◇ Sentido numérico.
- ◇ La suma y la resta.
- ◇ Resolución de problemas. El modelo de barras.
- ◇ La multiplicación y la división.
- ◇ Fracciones.

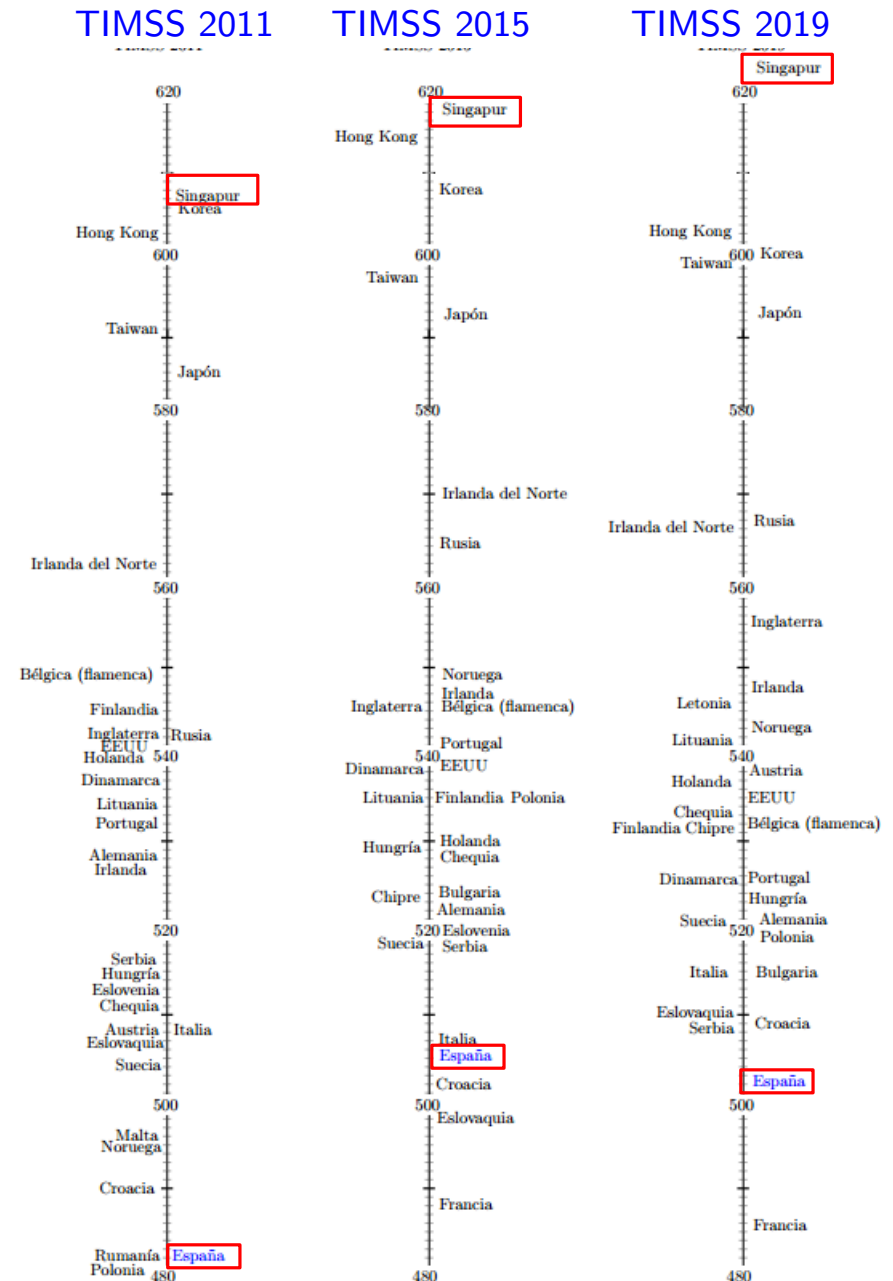
La situación actual en España

* ¿Estamos de acuerdo en que tenemos problemas?

* Información:

<https://www.educacionyfp.gob.es/inee/evaluaciones-internacionales/timss/timss-2019.html>

* ¿Tenemos un diagnóstico para origen de los problemas?



Un vídeo para reflexionar

- * Sobre la enseñanza de las matemáticas en Singapur en los años 70:

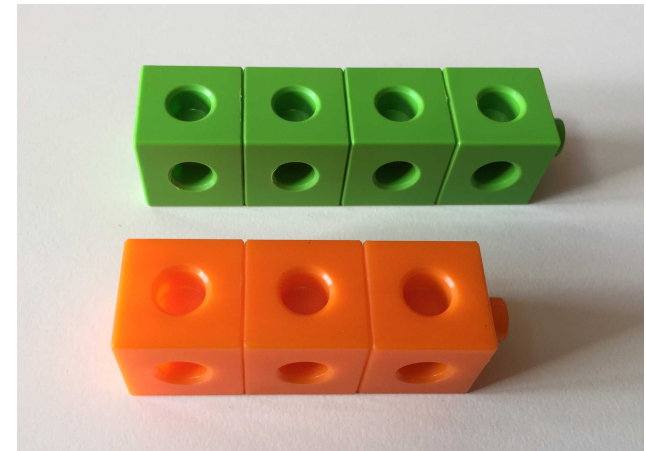
<https://youtu.be/3kxs5hOHpbo>

- * Sus errores:
 - ◇ Exceso de cálculos tediosos.
 - ◇ Aprendizaje rutinario de procedimientos, sin entenderlos.
 - ◇ Aprendizaje memorístico.
- * El desarrollo de lo que se conoce como “método Singapur” fue la respuesta.
- * Basado en ideas “clásicas” de la didáctica de las matemáticas occidental.

Fundamentos metodológicos

1 El aprendizaje en tres etapas (Jerome Bruner)

(1)

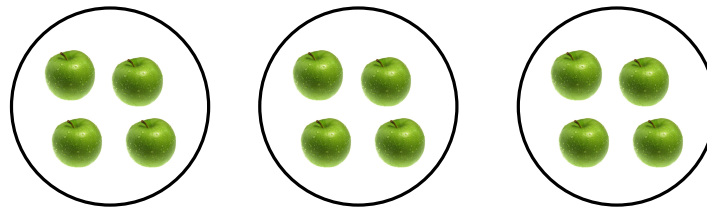


Concreta

Fundamentos metodológicos

1 El aprendizaje en tres etapas (Jerome Bruner)

¿Cuántas manzanas hay?



(2) Pictórica (gráfica, visual)

Fundamentos metodológicos

1 El aprendizaje en tres etapas (Jerome Bruner)

(3)

$$27 + 5 = 30 + 2 = \square$$

↓

$$3 + 2$$

$$4 \times 3 = 12$$

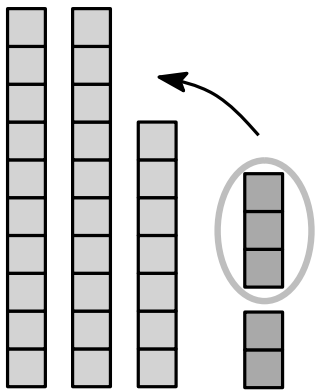
CPA

Abstracta (simbólica)

Fundamentos metodológicos

2 El aprendizaje de los procedimientos y la comprensión de los conceptos **deben trabajarse en paralelo.**

Richard Skemp: Relational understanding and instrumental understanding (1976)



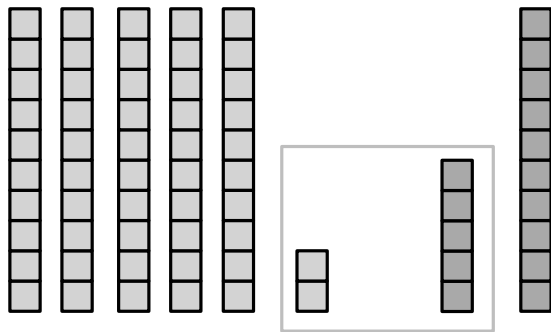
$$27 + 5 = 30 + 2 = \square$$
$$\downarrow$$
$$3 + 2$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 27 \\ + 5 \\ \hline 32 \end{array}$$

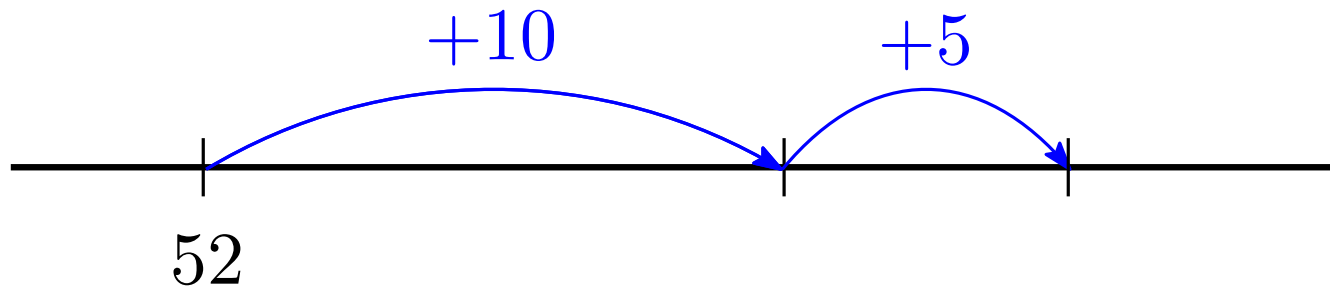
Fundamentos metodológicos

3 Variedad en las presentaciones (Zoltan Dienes)

La comprensión de un concepto es mejor si se presenta desde distintos puntos de vista.



$$52 + 15 = \square$$



Fundamentos metodológicos

4 El andamiaje y la zona de desarrollo próximo (Vygotsky)

En lugar de ir diciendo al alumno “esto se hace así”, se le proponen actividades que estén en su zona de desarrollo próximo.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{\square}{6} + \frac{\square}{6} = \frac{\square}{6}$$

Fundamentos metodológicos (resumen)

- ◇ El aprendizaje en tres etapas (Jerome Bruner)
- ◇ El aprendizaje de procedimientos y la comprensión de los conceptos deben ir en paralelo (Richard Skemp)
- ◇ La importancia de la variedad en las presentaciones (Zoltan Dienes)
- ◇ El andamiaje y la zona de desarrollo próximo (Lev Vygotski)

Y un elemento adicional:

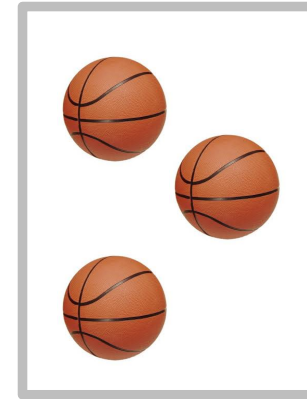
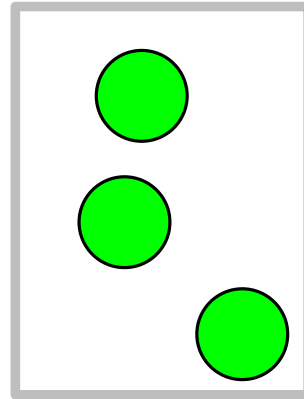
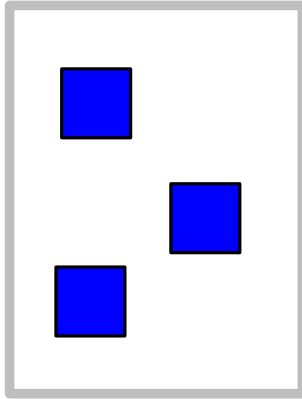
- ◇ La importancia de la **verbalización**.

Los inicios con los números

- * En este curso nos vamos a centrar en los inicios con la **aritmética** y en la **resolución de problemas**.
- * ¿Cuál es (o debería ser) el objetivo fundamental de aprendizaje (sobre números) durante la **educación infantil**?
- * El desarrollo del **sentido numérico**.
- * ¿Qué es el número **tres**?

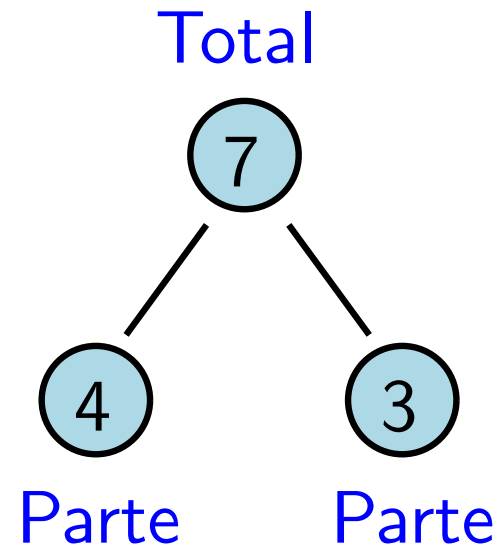
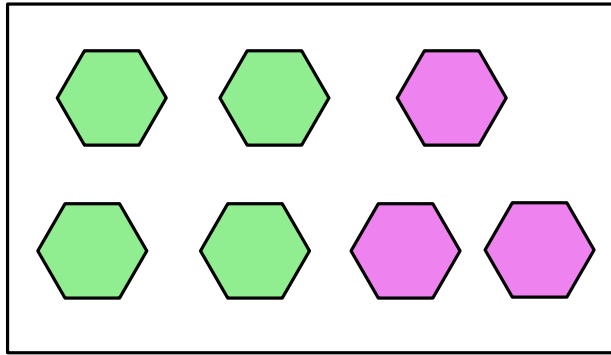
- * La lectoescritura de los números requiere cierto trabajo (que no tiene contenido matemático).
- * Dedemos **aprender a contar** (memorizar la secuencia numérica) dotando a la actividad de **significado**.

Los inicios con los números - El sentido numérico



- * El concepto de **tres** es “lo que tienen en común” estos conjuntos.

Los números conectados



“number bonds”

cuatro y tres son siete

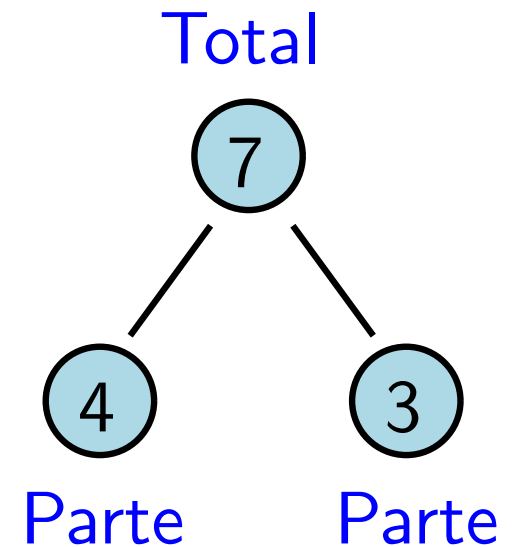
(esto debería ser **previo a la suma**)

Números conectados y policubos



Herramienta virtual (gratuita)

<https://www.didax.com/apps/unifix/>

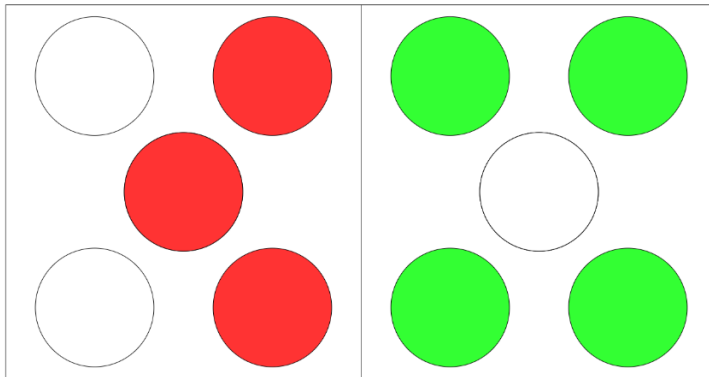
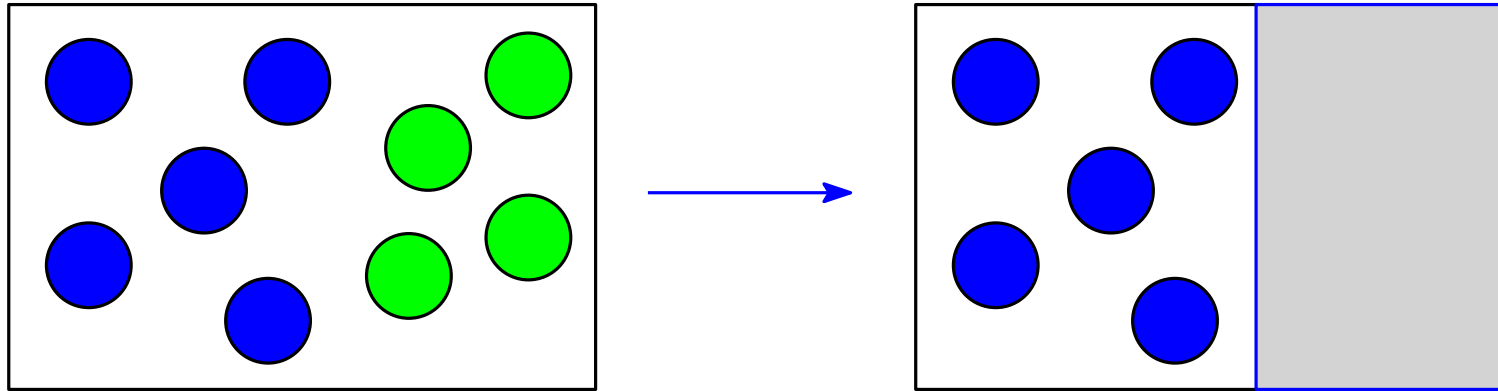


Regletas



Descomposiciones numéricas

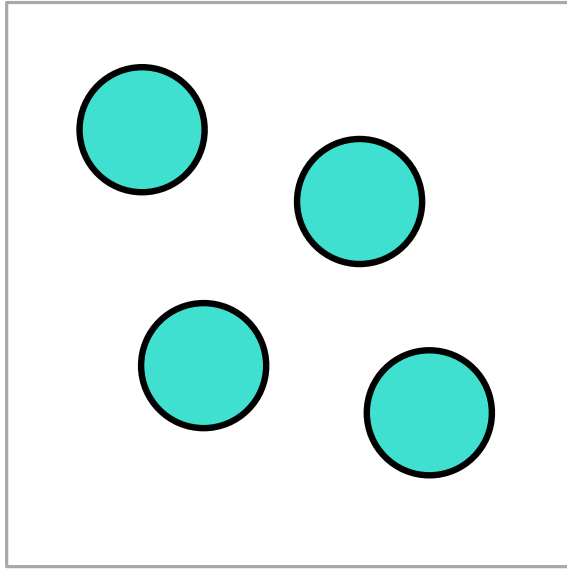
- * Muy importante trabajarlas en profundidad.



Rejilla húngara

<https://mathsbot.com/manipulatives/hungarianFrame>

La subitización

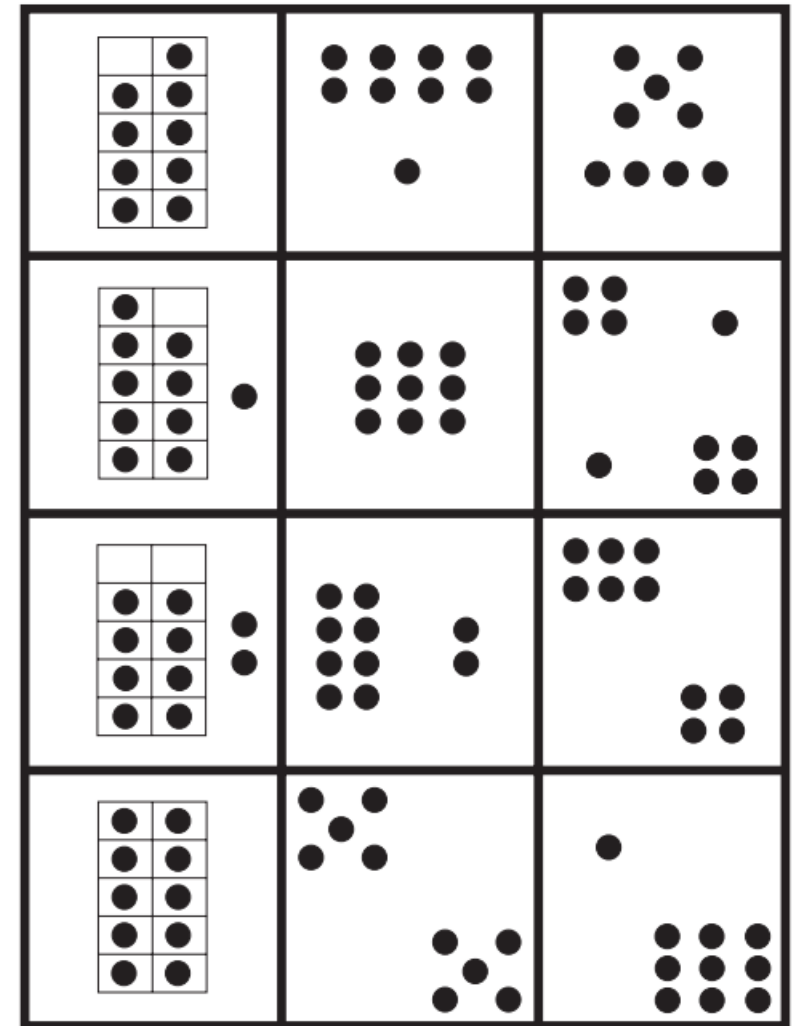
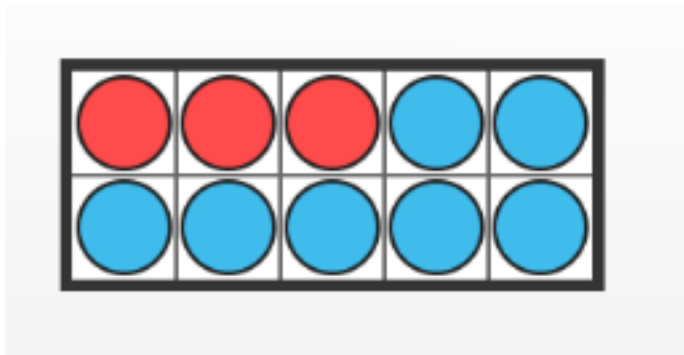
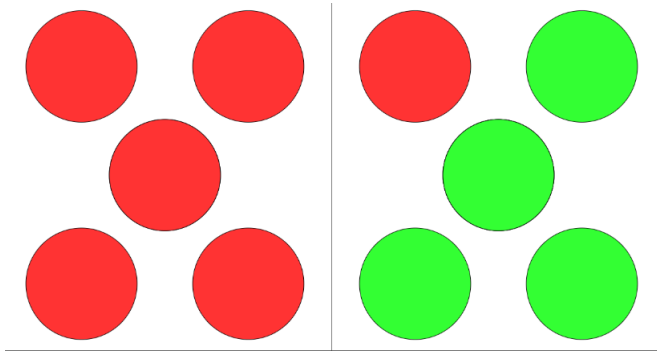


“contar sin contar”

- * Es una habilidad que conviene trabajar (con actividades adecuadas a la madurez de los alumnos, por supuesto).
- * También puede ayudar para trabajar la **descomposición** de los números.

Descomposiciones del 10

- * Serán especialmente importantes cuando los números crezcan.



Tarjetas de puntos

<https://www.mathlearningcenter.org/resources/apps>

BLM 5
Dot Cards (c)

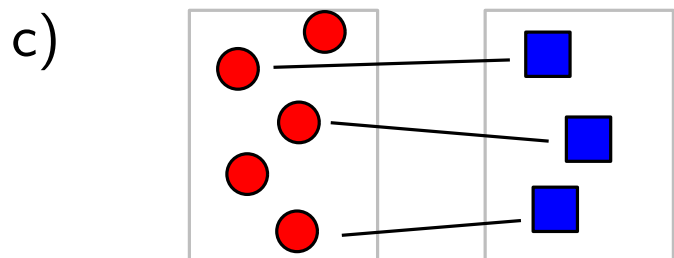
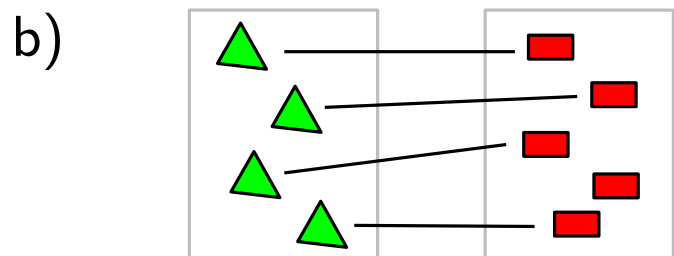
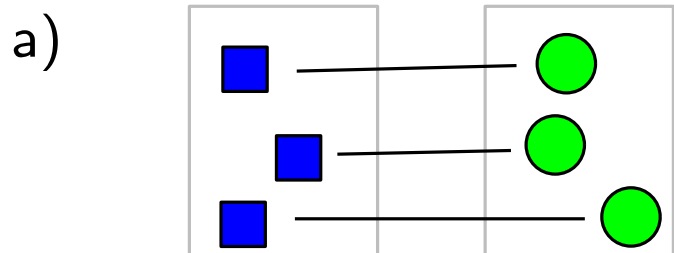
Copyright © 2014 Pearson Education, Inc. All rights reserved.

Pedro Ramos. Matemáticas Singapur.

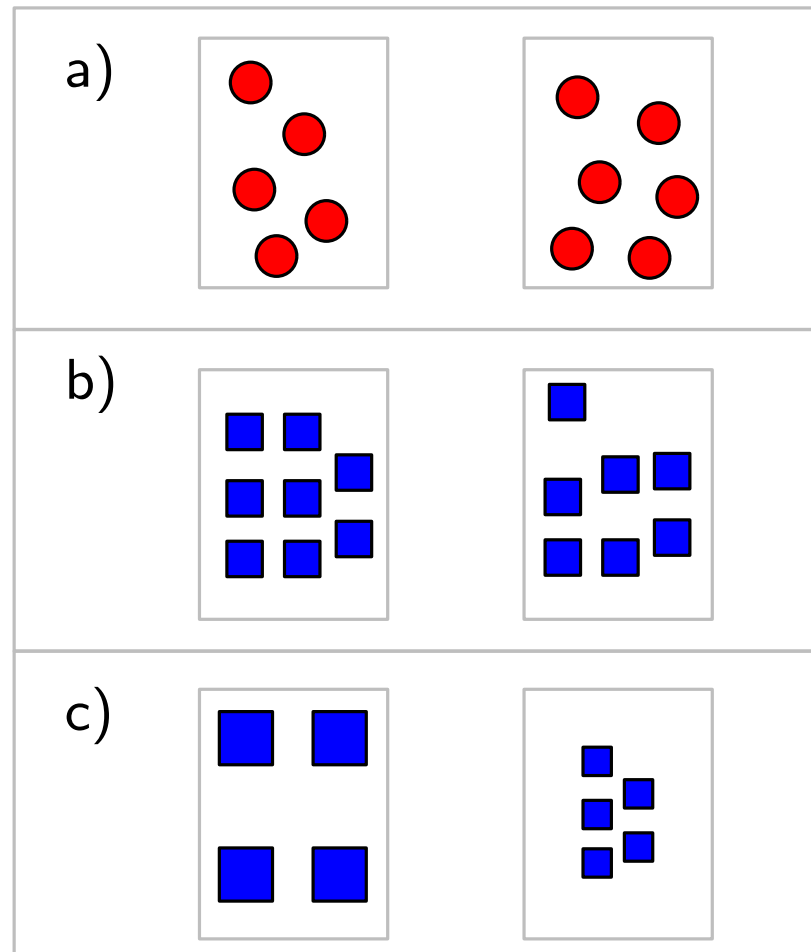
Comparar conjuntos

* Importante para el desarrollo del sentido numérico.

1 ¿Hay los mismos?



2 ¿Dónde hay más?



Materiales



policubos
cubos encajables

Formas de sumar

1. Sumar contando.

a) contar todo.

b) contar desde un sumando – el mayor.

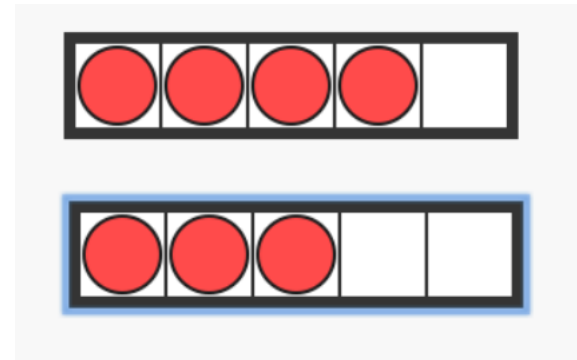
2. Sumar sin contar.

Fundamental desarrollar estrategias antes de empezar con el algoritmo tradicional.

Hay que trabajarlo de forma gradual, primero hasta el 10.

Estrategias de iniciación a la suma

- * Rejillas numéricas (grupos de 5).



- * Otras estrategias: usar los dobles, la compensación ...
- * El uso de materiales es fundamental.

$$4 + 5 = 4 + 4 + 1 =$$

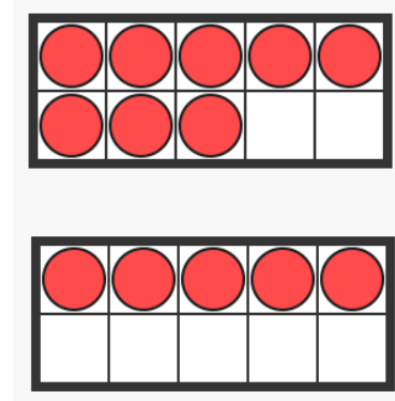
$$5 + 3 = 4 + 4 =$$

Actividad: suma de dos números de una cifra

- * Piensa diferentes estrategias para calcular $8 + 5$.

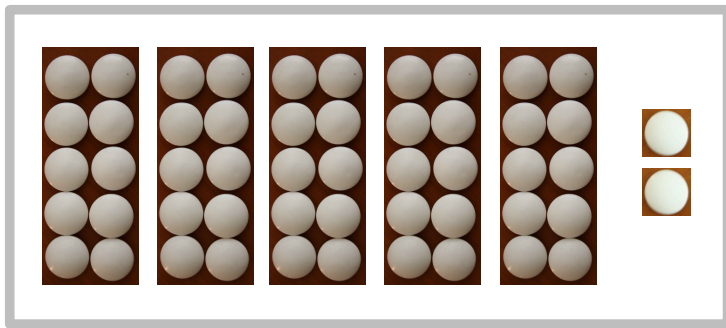
$$8 + 5 = \text{“diez y tres”}$$

<https://www.mathlearningcenter.org/resources/apps>

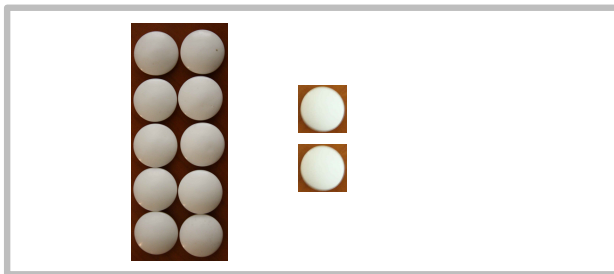


El número de dos cifras

- * Enfoque “tradicional”: ábaco y fichas de colores
- * Alternativa: hacemos grupos de diez.
Los materiales, de nuevo fundamentales.



_____ decenas y _____ unidades



12

diez y dos
se escribe **doce**

El número de dos cifras

- * Bloques de base 10



- * Una alternativa online:
<https://apps.mathlearningcenter.org/number-pieces/>

Algoritmos de la suma

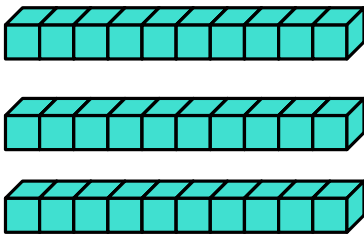
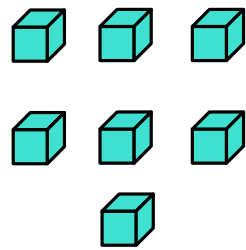
- * ¿Qué algoritmos para la suma son útiles si creemos que el aprendizaje de los procedimientos y la comprensión de los conceptos deben trabajarse en paralelo?
- * Primero, lo que no me parece una buena alternativa.

$$\begin{array}{r} 11 \\ 574 \\ + 369 \\ \hline 943 \end{array}$$

Algoritmos de la suma

- * Hay formas muy distintas de presentar el “algoritmo tradicional” .

Tabla de valor posicional

decenas	unidades
dieces	unos
	

37

Actividad

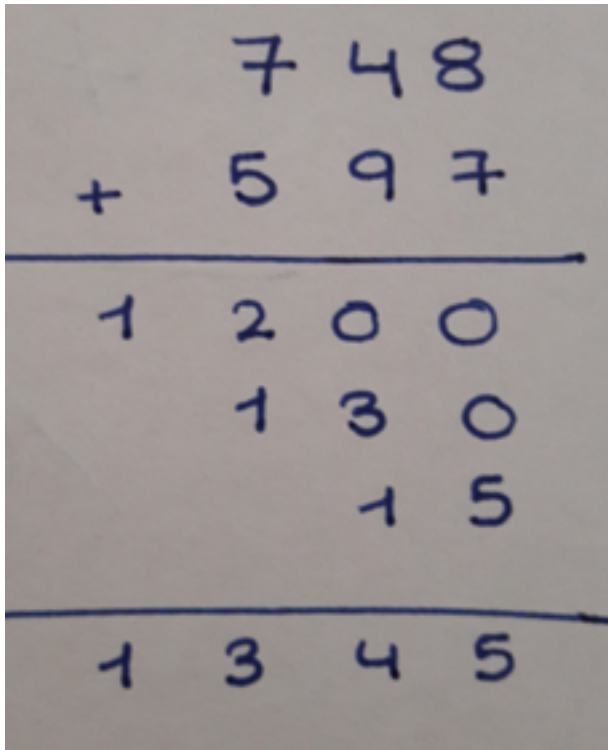
- * Utiliza los bloques de base 10 para representar estos números, y calcula estas sumas, haciendo con los materiales los reagrupamientos (llevadas) necesarios.

$$\begin{array}{r} 47 \\ +25 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 363 \\ +174 \\ \hline \end{array}$$

Algoritmos de la suma

- * Y hay algoritmos “alternativos”:



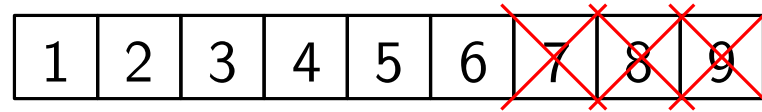
36 + 43		
	Quedan	Suma
	36	43
6	30	49
1	29	50
9	20	59
20	0	79

ABN

- * Temas para la reflexión: ¿ventajas e inconvenientes? ¿Es necesario el estudio de un algoritmo “formal”?

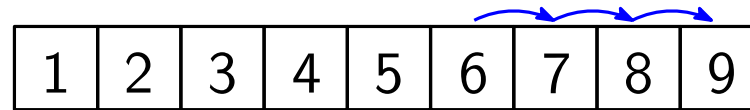
La resta

“De 9 quitamos 3”



$$9 - 3 = \square$$

“Del 6 al 9 van ...”



$$9 - 6 = \square$$

* Hay que trabajar los dos significados.

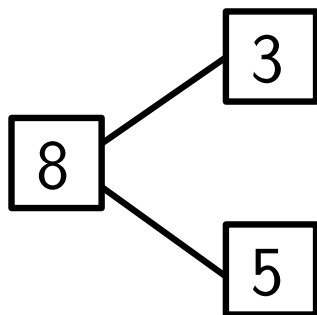
Formas de restar

1. Restar contando.
 - a) restar quitando.
 - b) contar desde el menor.

2. Restar sin contar.

Fundamental desarrollar estrategias antes de empezar con el algoritmo tradicional.

- * La conexión con la suma es fundamental.
- * Los números conectados son una herramienta muy útil.



$$3 + 5 = 8$$

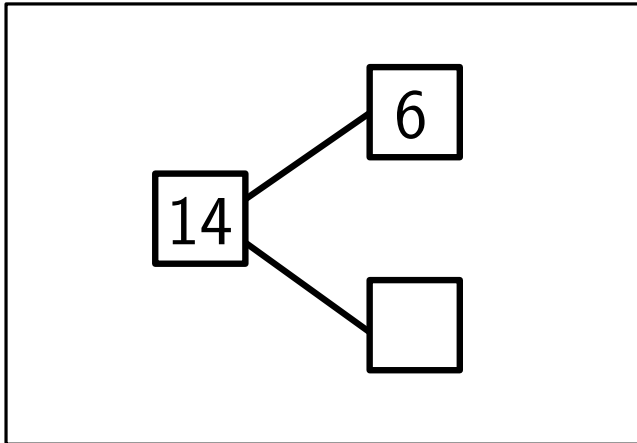
$$8 - 5 = 3$$

$$5 + 3 = 8$$

$$8 - 3 = 5$$

Actividad

- * Piensa estrategias para calcular $14 - 6$ (sin contar).



$$14 - 6 =$$

A diagram showing the equation $14 - 6 =$ followed by a blank line. Two arrows point from the number 6 down to the numbers 4 and 2, which are positioned below the blank line.

“Quitar de 10”

$$14 - 6 =$$

A diagram showing the equation $14 - 6 =$ followed by a blank line. Two arrows point from the number 6 down to the numbers 4 and 10, which are positioned below the blank line.

$$10 - 6 = 4$$

$$4 + 4 = 8$$

Algoritmos para la resta

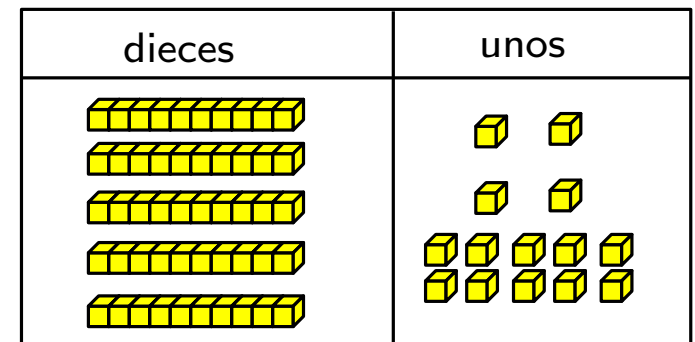
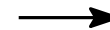
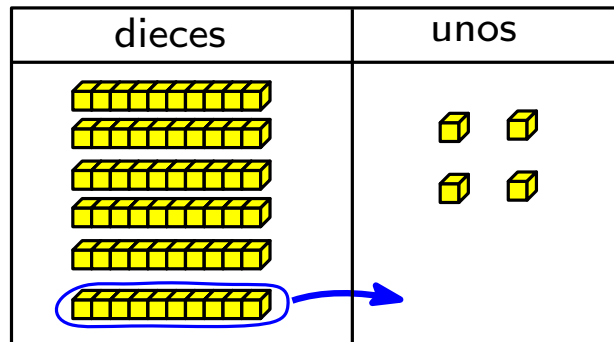
El algoritmo tradicional
(en España)

$$\begin{array}{r} 64 \\ - 48 \\ \hline 16 \end{array}$$

* Una alternativa (ya bastante extendida en nuestras aulas):

$$\begin{array}{r} 64 \\ - 48 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \quad 14 \\ \cancel{6} \quad \cancel{4} \\ - 4 \quad 8 \\ \hline \end{array}$$



* Restamos quitando → solo representamos el minuendo.

Actividad

- * Utiliza los bloques de base 10 para calcular estas restas, haciendo con los materiales los reagrupamientos necesarios.

$$\begin{array}{r} 53 \\ - 18 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 403 \\ - 137 \\ \hline \end{array}$$

¿Algoritmos alternativos?

- * ¿Existe para la resta un análogo de este algoritmo para la suma?

$$\begin{array}{r}
 748 \\
 + 597 \\
 \hline
 1345 \\
 \hline
 \end{array}$$

- * Algoritmo ABN para la resta.

437 - 248		
Quito	Quedan	Restan
8	240	429
29	211	400
100	111	300
11	100	289
100	0	189

437 - 248	
Pongo	Tengo
12	260
100	360
40	400
30	430
7	437

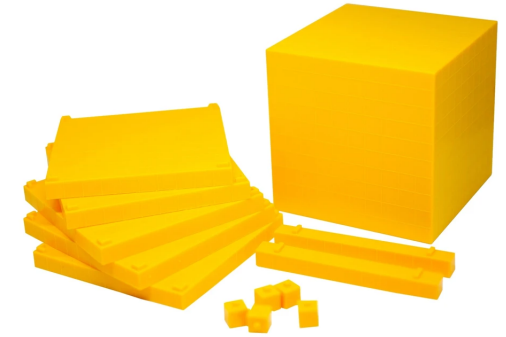
¿Y el “cálculo mental”? (Cálculo razonado)

- * Los números conectados y la recta numérica vacía son excelentes herramientas para desarrollar estrategias de cálculo flexible.
- * Piensa diferentes estrategias para calcular:
 - a) $123 + 45$
 - b) $98 + 137$
 - c) $145 - 28$
 - d) $203 - 106$

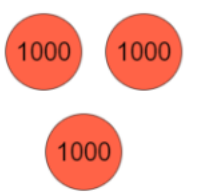

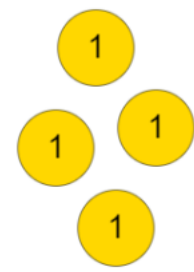
En 3.º, el grupo de mil

- * Representar los números de 4 cifras con los bloques de base 10 empieza a ser poco manejable.

Es prematuro prescindir de un apoyo en la representación (al menos para algunos alumnos).



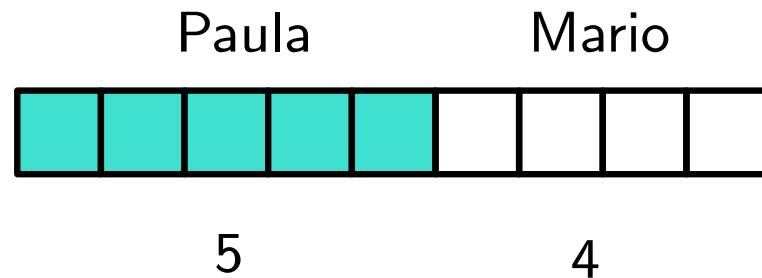
- * Las **fichas numéricas** (number disks) son una buena alternativa.

1000s	100s	10s	1s
			

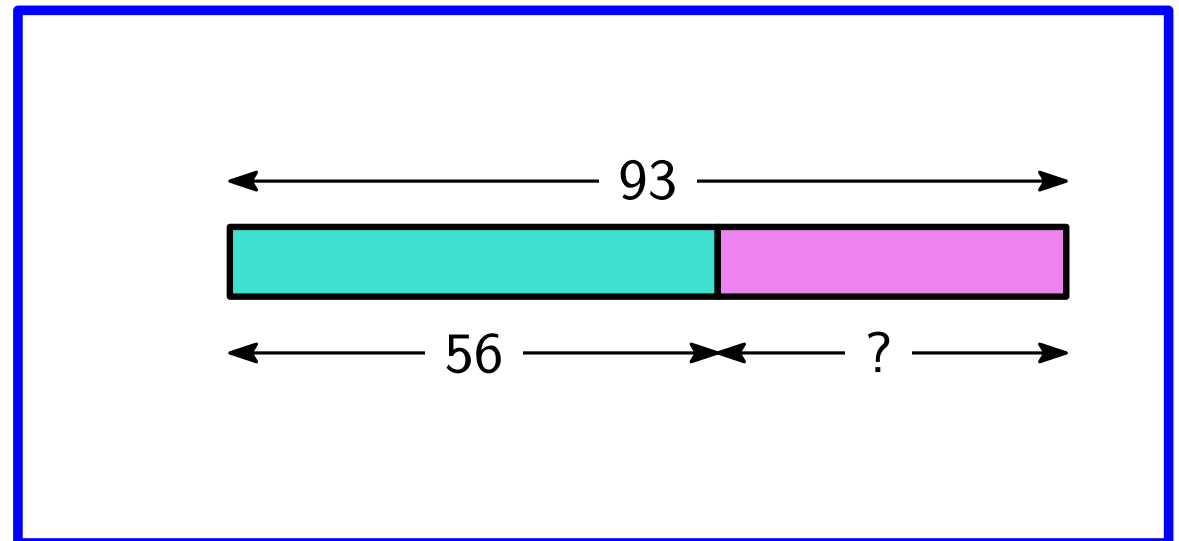
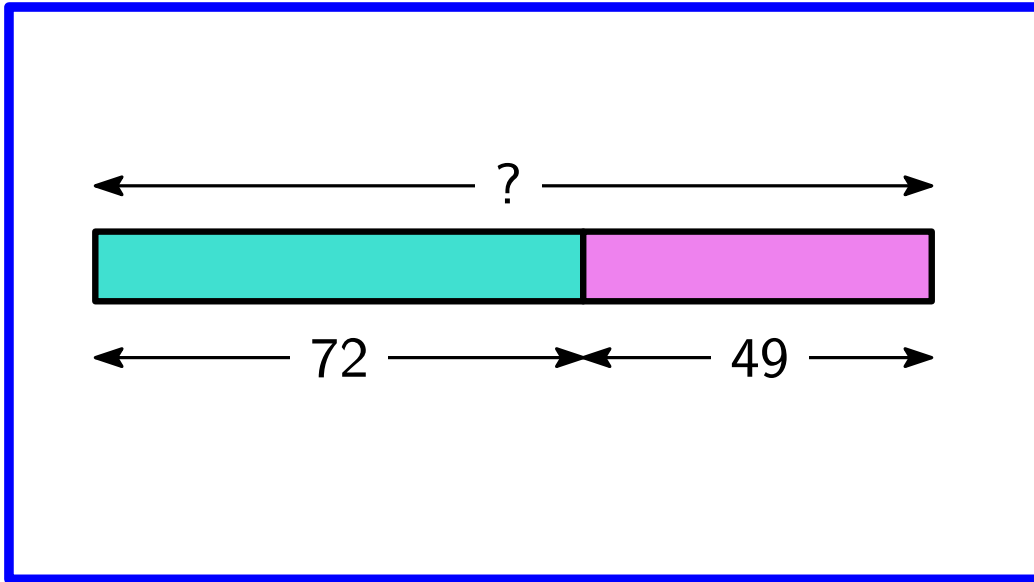
<https://mathsbot.com/manipulatives/placeValueCounters>

Resolución de problemas

- * Y este problema ... ¿es de sumar o de restar?
- * Una herramienta muy útil: [el modelo de barras](#).



Partes - Total



Observaciones

- * Para que el modelo sea efectivo hay que introducirlo y trabajarlo adecuadamente.
- * En el paso de representar 15 unidades explícitamente a representarlas con una barra hay una abstracción a la que hay que prestar la atención necesaria.
- * En este modelo el alumno se centra en las relaciones, no en los objetos ni en las cantidades descontextualizadas.
- * Los objetos son representados mediante rectángulos, un rectángulo es un objeto fácil de dibujar, de dividir. Útil para representar números más grandes y mostrar relaciones de proporcionalidad.

Problemas

1. Un pastelero ha hecho 35 bollos rellenos de chocolate, y también ha hecho bollos rellenos de crema. Sabemos que ha hecho 19 bollos de chocolate más que bollos de crema.
 - a) ¿Cuántos bollos de crema ha hecho el pastelero?
 - b) ¿Cuántos bollos ha hecho en total?

2. Jaime tiene 15 euros más que Lucía y entre los dos tienen 97 euros. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

Problemas

1. Luis tiene 316 euros y su amiga Marta tiene 488 euros. ¿Cuánto tiene que darle Marta a Luis para que los dos se queden con la misma cantidad de dinero?
2. Tengo 765 euros y quiero repartirlos entre Alicia y Benito, de manera que Alicia reciba el doble que Benito. ¿Cuánto dinero recibirá cada uno?
3. Lisa tiene 128 euros y Pablo tiene 97 euros. Se compraron dos abrigos iguales, y después de pagar Lisa tenía el doble de dinero que Pablo. ¿Cuánto les costó el abrigo?
4. Marta tiene el doble de dinero que Pablo, y Juan tiene 13 euros menos que Marta. Si entre los tres tienen 192 euros, ¿cuánto dinero tiene cada uno?

* Curso introductorio al modelo de barras (en abierto):
<https://sites.google.com/view/modelodebarras/home>

Dificultades en la resolución de problemas

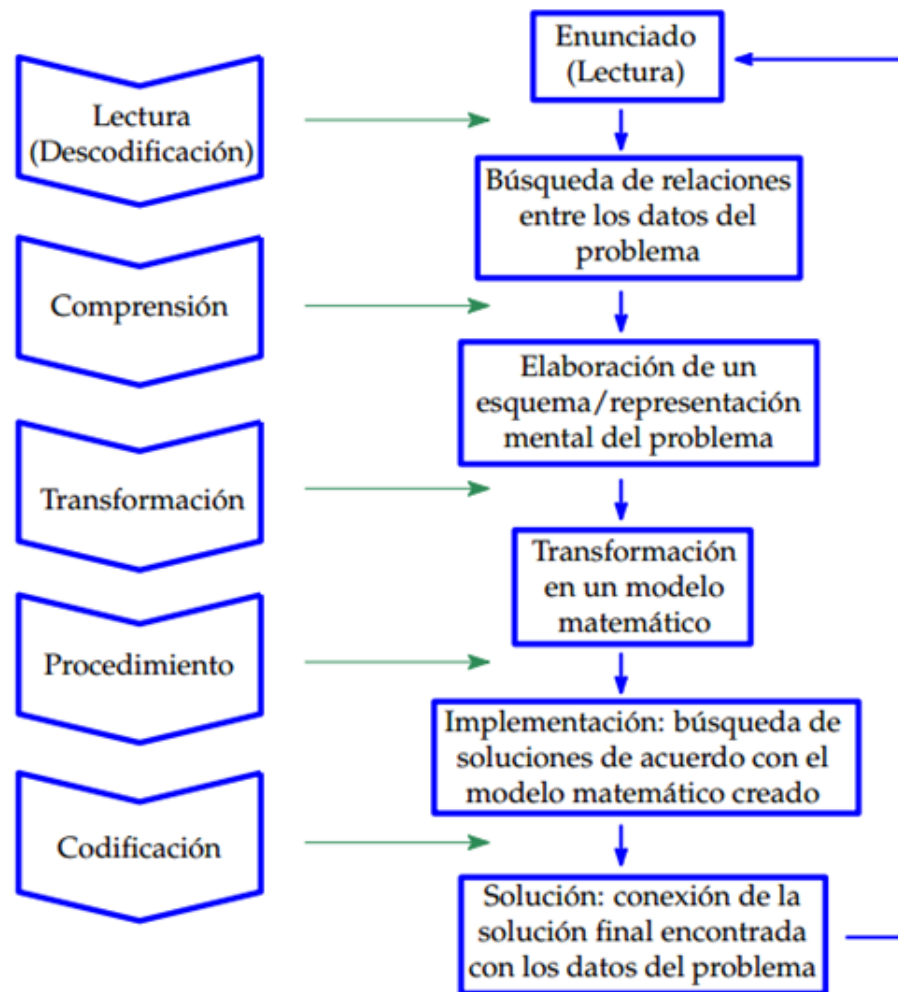


Figura 2.2: Jerarquía de errores de Newman integrada con las fases de resolución de problemas.

Arántzazu Fraile Rey: El desarrollo de actitudes valiosas para la resolución de problemas en Educación Primaria. Tesis Doctoral. Universidad de Alcalá

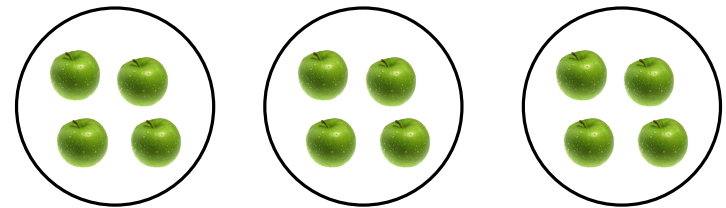
La multiplicación

- * ¿Cómo se puede introducir?
- * Una opción: “multiplicado por”

$$3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3$$

- * La alternativa: “veces”

3×4 significa 3 veces 4



$$3 \times 4 = 4 + 4 + 4$$

Las tablas...

* La interpretación del signo \times y las tablas de multiplicar:

$$2 \times 1 =$$

$$2 \times 2 =$$

$$2 \times 3 =$$

$$2 \times 4 =$$

$$2 \times 5 =$$

Veces \leftrightarrow Multiplicado por

- * A nivel internacional, no hay mayoría clara.
- * Controversia en el periódico.
¿Por qué no es lo mismo 5×3 que 3×5 ?

http://verne.elpais.com/verne/2015/10/31/articulo/1446292466_

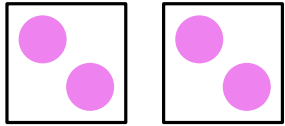
- * La ventaja de usar “veces”: inmediato de entender.
- * Pero, ojo: “veces” y las tablas de multiplicar.
- * Lo más importante: evitar contradicciones.
¿El doble de 6?

Aprendizaje comprensivo ↔ Memorización



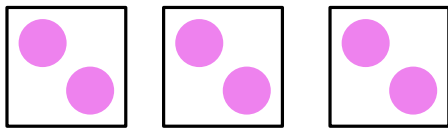
$$1 \times 2 = 2$$

1 grupo de 2 es 2
1 vez 2 es 2



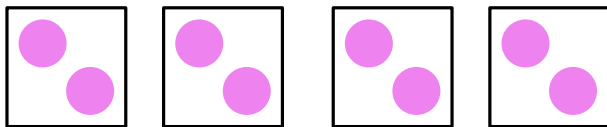
$$2 \times 2 = 4$$

2 grupos de 2 son 4
2 veces 2 son 4



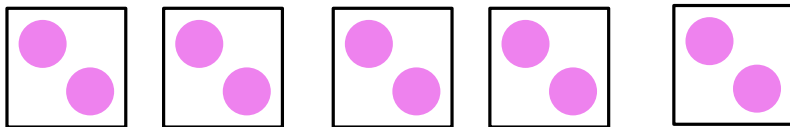
$$3 \times 2 = 6$$

3 grupos de 2 son 6
3 veces 2 son 6



$$4 \times 2 = 8$$

4 grupos de 2 son 8
4 veces 2 son 8



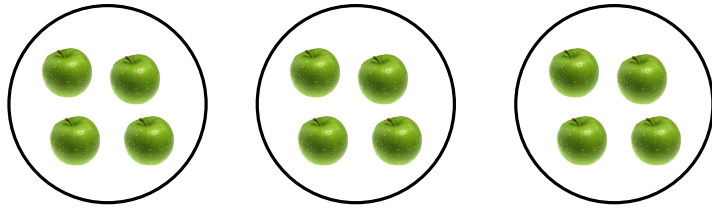
$$5 \times 2 = 10$$

5 grupos de 2 son 10
5 veces 2 son 10

* ¿Aprender **de memoria** o aprender **con la memoria**?

Modelos de la multiplicación

1. Suma repetida.



$$3 \times 4 = 4 + 4 + 4$$

tres grupos de cuatro
tres veces cuatro

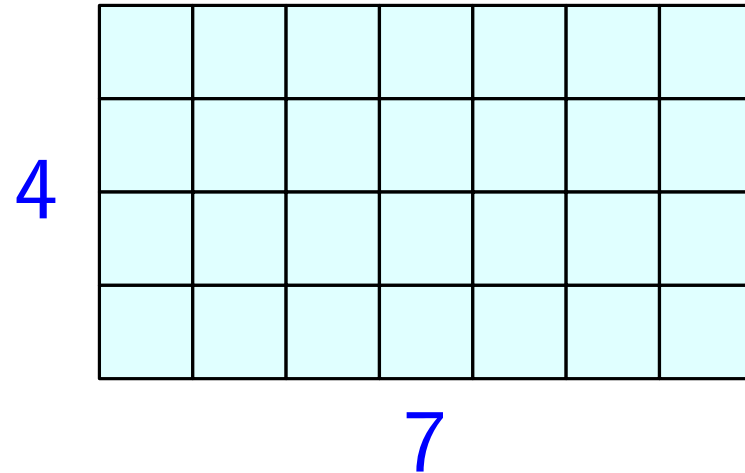
- * Es el significado más adecuado para la introducción de la multiplicación.
 - intuitivo
 - conexión con la suma, ya conocida

Modelos de la multiplicación

2. Modelo de área.

$$4 \times 7$$

$$7 \times 4$$



- a) Muy útil para entender varias propiedades de la multiplicación.
- b) Conexión con la geometría.

Modelos de la multiplicación

3. Modelo de proporcionalidad, escalado.

Multiplicado por: si leemos 5×2 como “cinco multiplicado por dos”, ¿qué significa?

- a) Conexión con la división: multiplicar por 3, operación inversa a dividir entre 3.

Modelos de la multiplicación

4. Modelo combinatorio.

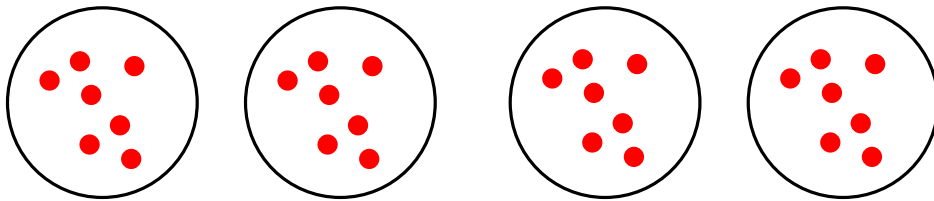
Si tengo 3 pantalones y 4 camisetas, ¿de cuántas formas distintas puedo vestirme?

- a) Es un modelo importante en resolución de problemas y con varias aplicaciones.
- b) Accesible a los alumnos desde el principio de primaria.
- c) Poco trabajado en España.

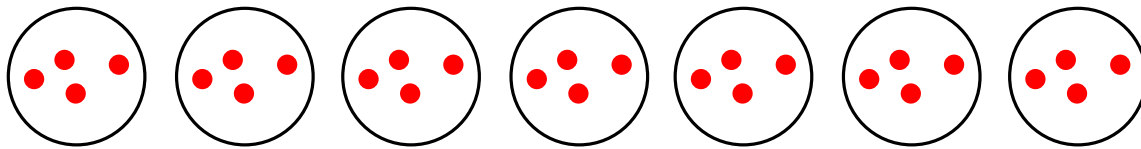
Propiedades de la multiplicación

* Conmutativa

* Ojo: no es **nada** intuitivo que 4 veces 7 sea igual que 7 veces 4

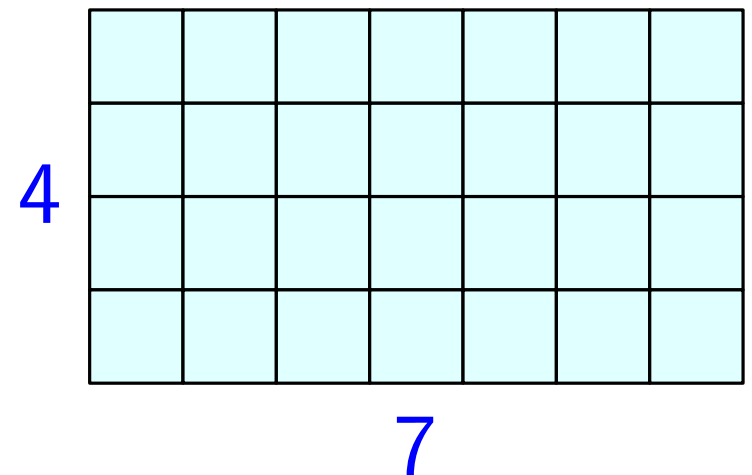


$$4 \text{ veces } 7 \leftrightarrow 4 \times 7$$



$$7 \text{ veces } 4 \leftrightarrow 7 \times 4$$

* Modelo de área.



Propiedades de la multiplicación

- * Propiedad distributiva
- * ¿Qué sentido tiene en primaria?
- * En los libros de texto ...

$$\begin{array}{ccc} 7 \times (3 + 5) & = & 7 \times 3 + 7 \times 5 \\ \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 7 \times 8 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 56 \end{array} & & \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 21 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 56 \end{array} & + & \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 35 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 56 \end{array} \end{array} \end{array}$$

Propiedad distributiva

* Fundamental para:

i) manipulaciones algebraicas: $2(x + 3) = 2x + 6$

ii) cálculo **natural** (pensado, mental):

$$12 \times 7 =$$

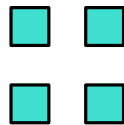
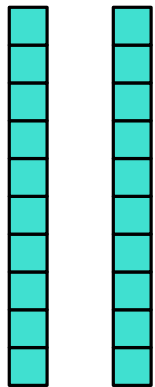
iii) algoritmo tradicional (y otras variantes) de la multiplicación.

Hacia el algoritmo de la multiplicación

* Una cuestión previa: $8432 \times 10 = 84320$

¿Por qué?

* Los materiales (en particular, los bloques de base 10) siguen siendo muy útiles.

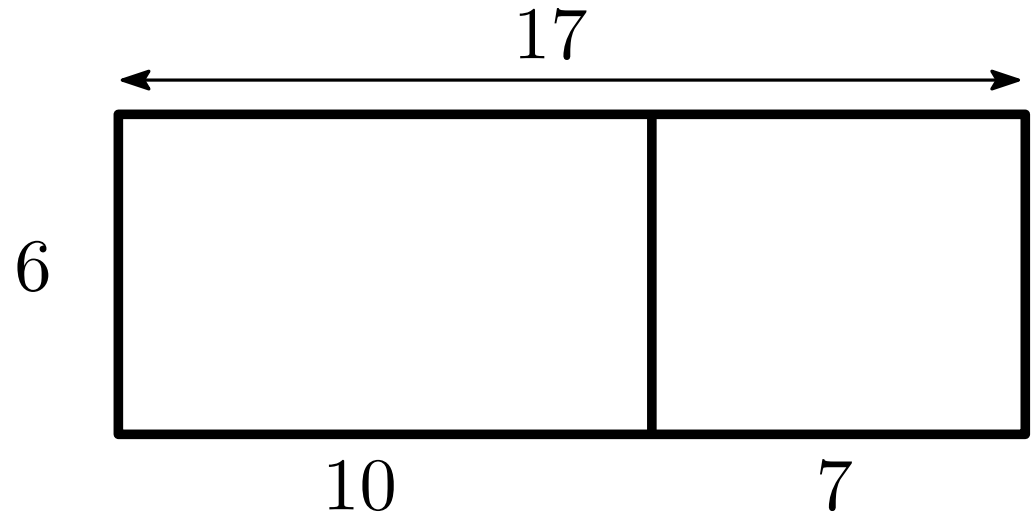


$$3 \times 24 =$$

El modelo de área

- * Una excelente ayuda para la comprensión de las propiedades y para la introducción del algoritmo.

$$6 \times 17 = 6 \times 10 + 6 \times 7$$



$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 6 \\ \hline 42 \\ + 60 \\ \hline 102 \end{array}$$

Problema (3° Primaria)

- * Nos dicen que Juan pesa 5 veces más que su perro, y que entre los dos pesan 42 kg. ¿Cuánto pesa cada uno?

La división

* “Dividir es repartir”. ¿Siempre?

1) Luis lleva 20 caramelos al colegio y quiere repartirlos entre 4 amigos. ¿Cuántos caramelos le da a cada amigo?

2) Luis tiene 20 caramelos y hace bolsas con 4 caramelos. ¿Cuántas bolsas puede hacer?

* El segundo significado es la **división de agrupamiento**.

Tiene el sentido de “hacer grupos iguales”.

(No se trabaja lo suficiente en nuestras aulas).

Relación con **medida**: ¿cuántas veces “cabe” 4 en 20?

Inventa dos problemas

camisetas

96 euros

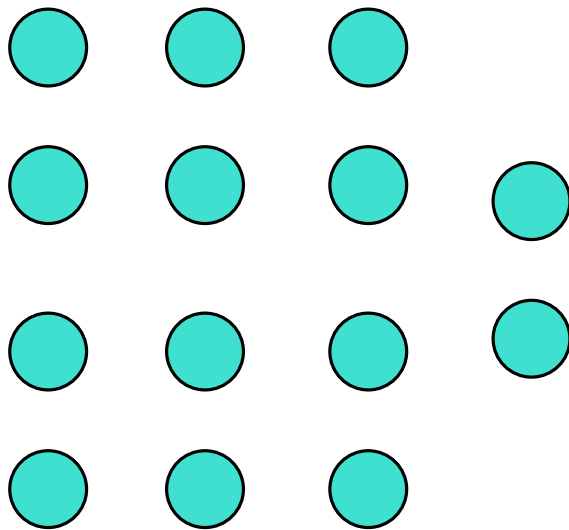
16

- * En uno de ellos, la división debe tener sentido de reparto; en el otro, de hacer grupos.

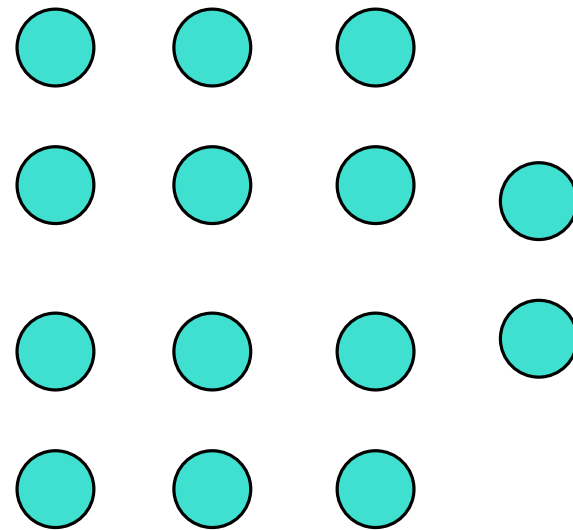
Introducción a la división

- * Con los puntos de las figuras:
 1. Haz dos grupos iguales.
 2. Haz grupos de dos.

1



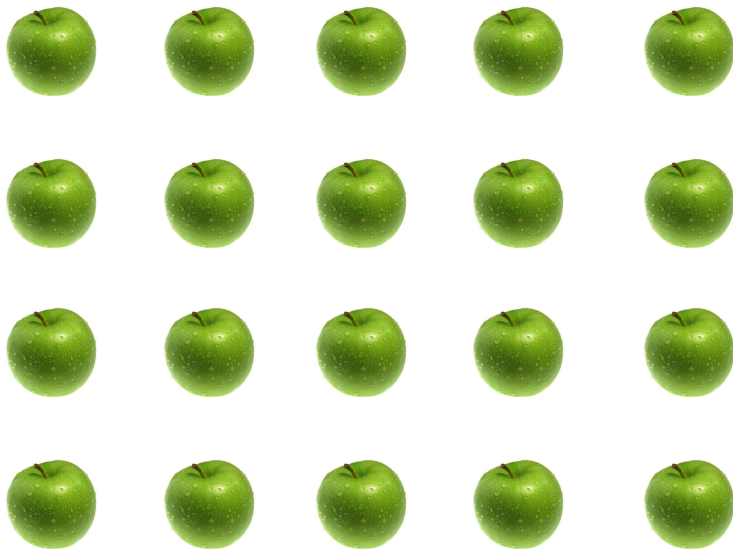
2



Multiplicación y división

- * Es importante trabajar la relación entre multiplicación y división, como operaciones inversas.

(Incluyendo también la diferencia entre reparto y agrupamiento)



División con resto

- * **División entera** (con resto, o euclídea)

Dados dos números naturales D (dividendo) y d (divisor), existen unos únicos números naturales c (cociente) y r (resto) tales que

$$D = c \times d + r \quad \text{y} \quad 0 \leq r < d.$$

- * Idea de cualquier algoritmo de división:

Aproximar por defecto el dividendo por múltiplos del divisor.

$$16 = \square \times 3 + \square$$

^
3

$$D = c \times d + r$$

* Ventajas de esta notación:

★ se adapta muy bien al cálculo mental y la estimación:

$$140 = \square \times 9 + \square$$

★ ayuda a entender el significado de la división (y de sus resultados, el cociente y el resto)

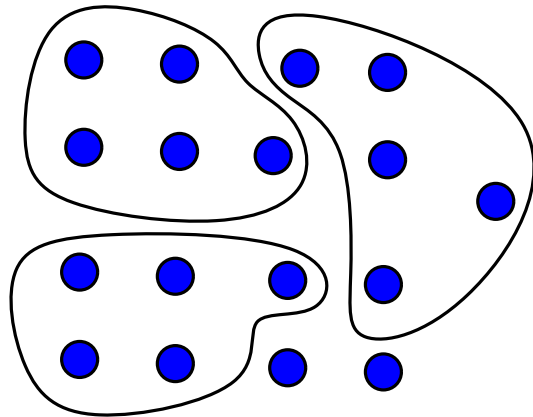
* Problema: Un astronauta empezó su viaje un martes a las 9 de la mañana. Si el viaje duró 115 horas, ¿qué día y a qué hora aterrizó?

* ¿Qué día de la semana será dentro de un año? ¿Por qué?

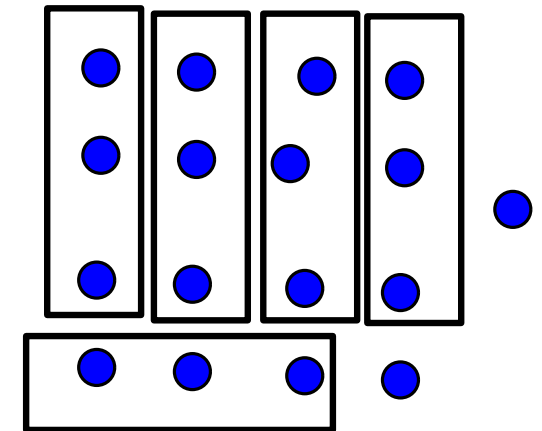
Introducción del algoritmo

* Repartimos 17 caramelos entre 3 amigos.

1. ¿cuántos caramelos le damos a cada amigo?
2. ¿cuántos caramelos sobran?



$$\begin{array}{r|l} 17 & 3 \\ - 15 & 5 \\ \hline 2 & \end{array}$$



¿Notación para la división?

$$17 \div 3 = 5 R 2$$

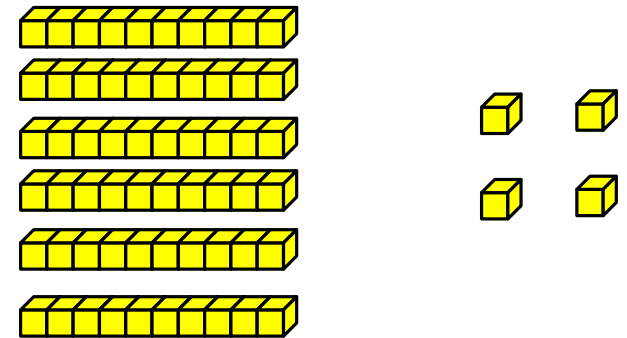
$$17 = 3 \times 5 + 2$$

Algoritmo de la división: introducción

- * También aquí debemos apoyarnos en los materiales, al principio.

- * Queremos hacer la división $64 \div 2$.

¿Cómo la interpretamos?



- * ¿Y si queremos hacer la división $52 \div 4$?

Divisiones en 4º – Singapur

(c)

$$\begin{array}{r}
 \overline{) 6480} \\
 \underline{4} \\
 8 \\
 \underline{8} \\
 0 \\
 \underline{0} \\
 0
 \end{array}$$

d 2 *q* *D*

(d)

$$\begin{array}{r}
 \overline{) 2184} \\
 \underline{14} \\
 78 \\
 \underline{70} \\
 84 \\
 \underline{84} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2184 \quad | \quad 7 \\
 \underline{21} \\
 08 \\
 \underline{7} \\
 14 \\
 \underline{14} \\
 0
 \end{array}$$

- * Los divisores de dos (o más) cifras han desaparecido del currículo (ya hace algunos años).

Algoritmos de división

- * Algoritmo tradicional: dos versiones.

Algoritmo “extendido”

$$\begin{array}{r} 6 \quad 4 \quad 0 \quad | \quad 2 \quad 3 \\ -4 \quad 6 \quad \quad | \quad 2 \quad 7 \\ \hline 1 \quad 8 \quad 0 \\ -1 \quad 6 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 9 \end{array}$$

Algoritmo “usual”
(“comprimido”)

$$\begin{array}{r} 6 \quad 4 \quad 0 \quad | \quad 2 \quad 3 \\ 1 \quad 8 \quad 0 \quad | \quad 2 \quad 7 \\ \hline 1 \quad 9 \end{array}$$

¿Otros algoritmos?

ABN

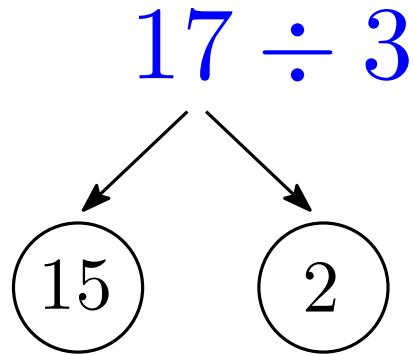
Una propuesta

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} 4 \ 2 \ 7 \\ - 1 \ 5 \ 0 \\ \hline 2 \ 7 \ 7 \\ - 1 \ 5 \ 0 \\ \hline 1 \ 2 \ 7 \\ - 1 \ 2 \ 0 \\ \hline 7 \end{array} & \begin{array}{r} 1 \ 5 \\ \hline 1 \ 0 \\ 1 \ 0 \\ + \ 8 \\ \hline 2 \ 8 \end{array} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{r|l} \begin{array}{r} 4 \ 2 \ 7 \\ - 3 \ 0 \ 0 \\ \hline 1 \ 2 \ 7 \\ - 1 \ 2 \ 0 \\ \hline 7 \end{array} & \begin{array}{r} 1 \ 5 \\ \hline 2 \ 0 \\ + \ 8 \\ \hline 2 \ 8 \end{array} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{r|l} \begin{array}{r} 4 \ 2 \ 7 \\ - 3 \ 7 \ 5 \\ \hline 5 \ 2 \\ - \ 4 \ 5 \\ \hline 7 \end{array} & \begin{array}{r} 1 \ 5 \\ \hline 2 \ 5 \\ + \ 3 \\ \hline 2 \ 8 \end{array} \end{array}$$

Algoritmo de los “cocientes parciales”

¿Otros algoritmos?

- * Basado en las descomposiciones de números:



- * Haz estos cálculos con los algoritmos indicados:
 - i) $147 \div 8$, descomponiendo y con cocientes parciales.
 - ii) $1347 \div 26$, con cocientes parciales.

Las fracciones: un objeto, varias interpretaciones

(1) Parte de un todo

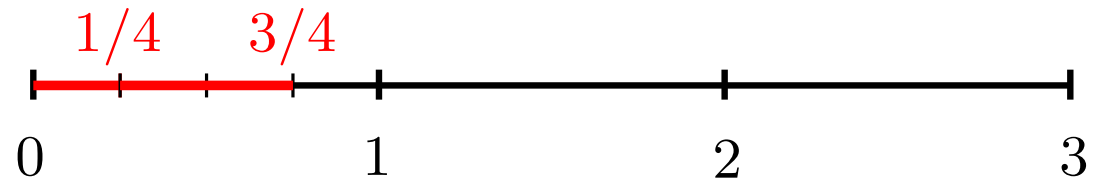


Hemos coloreado los $\frac{3}{5}$ de ...

(2) Una **cantidad**, una **medida**

(un número, un punto de la recta numérica)

¿ $\frac{3}{4}$?

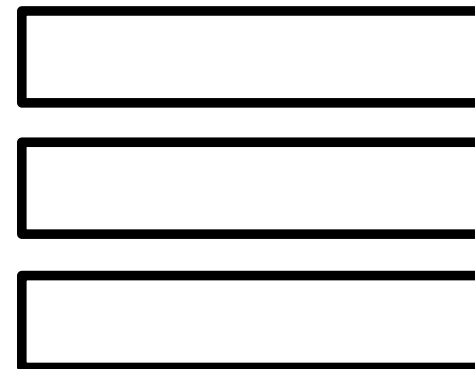


El denominador fija la unidad

El numerador, cuántas unidades tomo

(3) Un reparto (división)

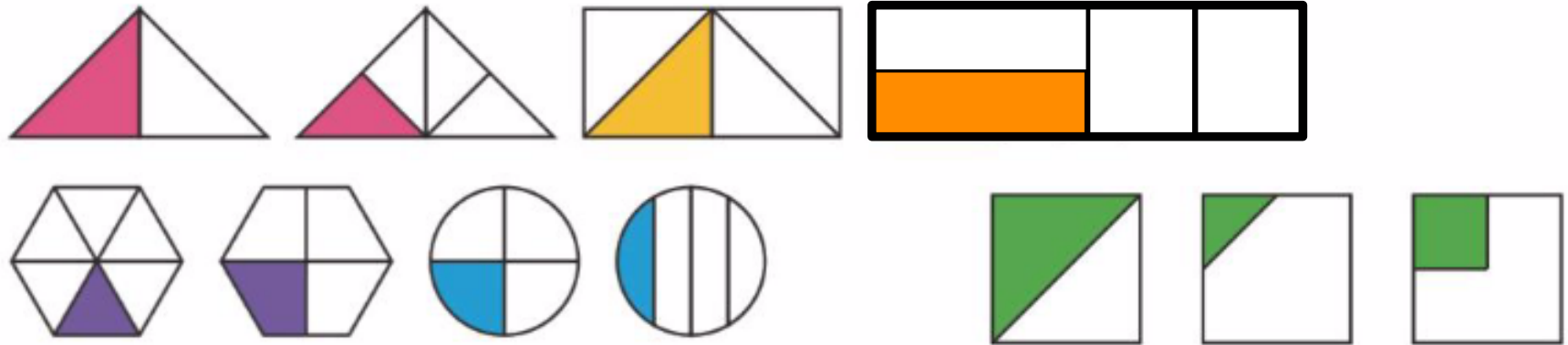
Queremos repartir 3
chocolatinas entre 5 niños.
¿A cuánto toca cada uno?



Importante en el aula

- * Para entender un nuevo concepto, es importante ver ejemplos positivos y negativos.

1 ¿Qué figuras están divididas en cuartos?



3 ¿Qué figuras representan $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{4}$? Rodea con diferentes colores.



Algunos ejemplos

- * He comido $\frac{1}{3}$ de los bombones de una caja y me quedan 12 bombones. ¿Cuántos bombones tenía la caja?



12 bombones

- * Lucía tenía la misma cantidad de cuentas rojas que azules. Usó $\frac{3}{4}$ de sus cuentas rojas y la mitad de sus cuentas azules para hacer un collar. ¿Qué fracción del total de sus cuentas ha usado para hacer el collar?

Definición de fracción

* Una **fracción** es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y $b \neq 0$.

numerador

denominador

no es un
número

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$$

1 medio + 1 tercio =



$2/3$



Parte de un todo



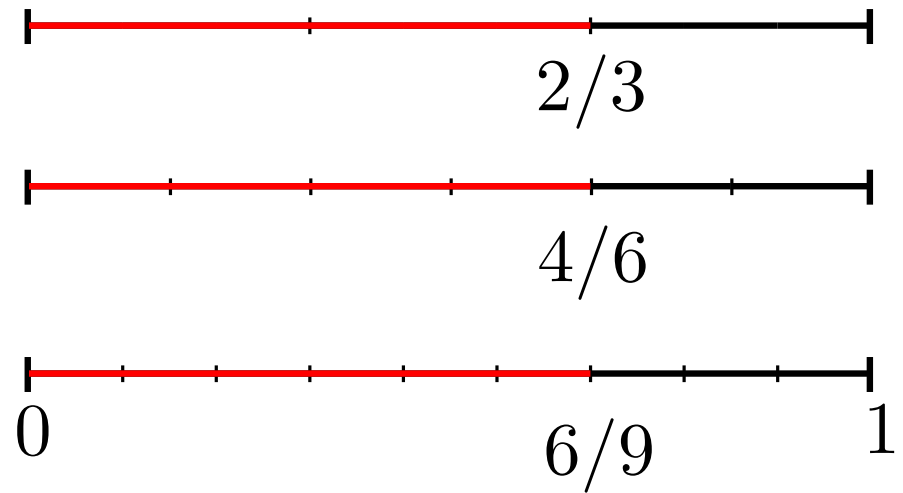
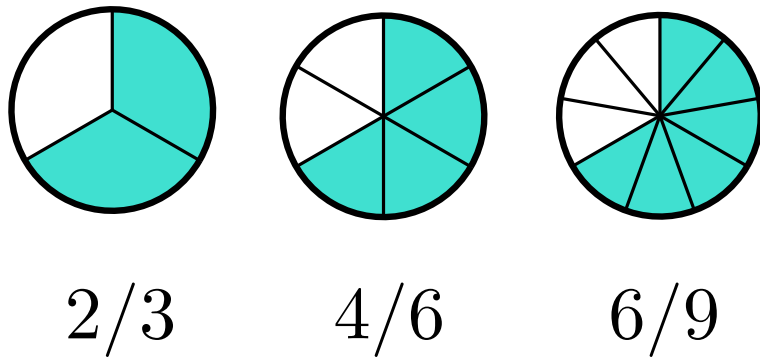
Punto de la recta numérica

- * Las dos interpretaciones son necesarias.
Lo más conveniente es empezar por la primera interpretación, e introducir la segunda en cursos posteriores.

Fracciones equivalentes

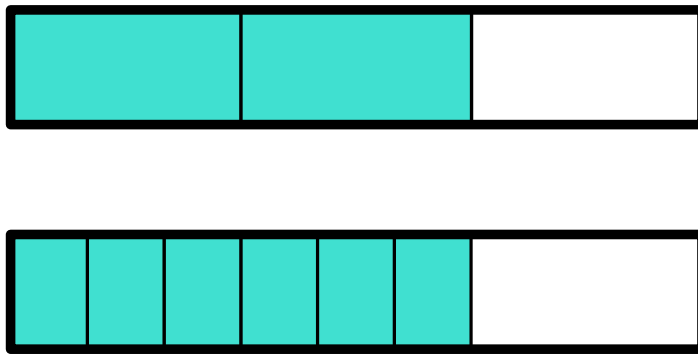
- * Las fracciones $2/3$, $4/6$, $6/9$, ... representan la **misma cantidad**.

Diremos que son fracciones **equivalentes**.



Fracciones equivalentes

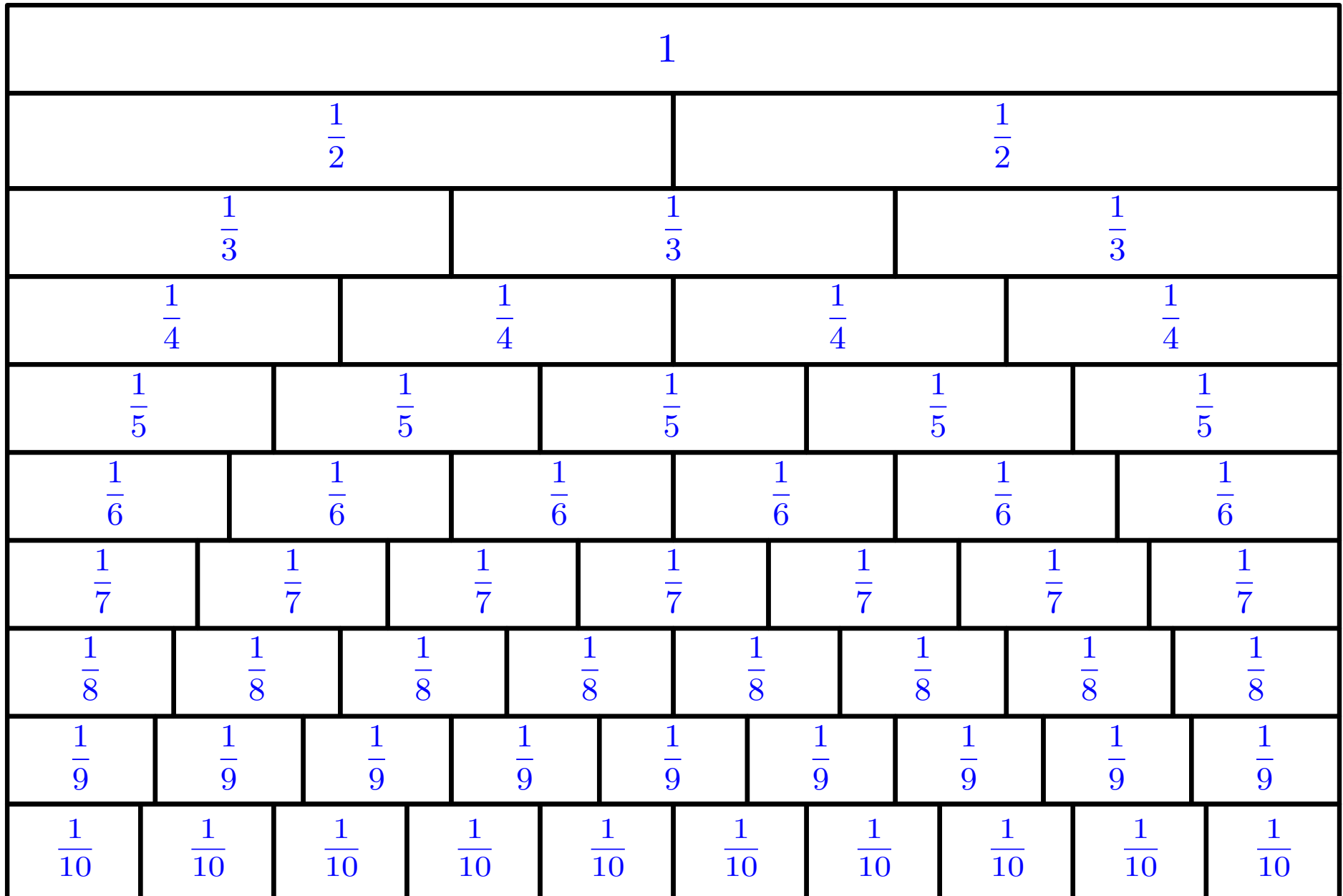
- * Es un concepto básico, y es fundamental que se entienda bien.



$$\frac{\times 3}{\times 3} \quad \curvearrowright \quad \frac{2}{3} \quad \curvearrowright \quad \frac{: 3}{: 3}$$
$$\frac{6}{9}$$

- * Una herramienta muy útil: el **muro de fracciones**.

Muro de fracciones



Propuestas de actividades

* Fracciones equivalentes: $\frac{2}{3} =$

* Comparación de fracciones: $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$

* Suma de fracciones: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$

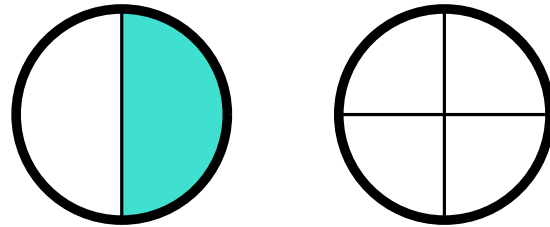
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$$

* Descomposición egipcia: $\frac{3}{5} = \frac{1}{\square} + \frac{1}{\square}$

<https://toytheater.com/fraction-strips/>

Propuestas de ejercicios

$$\frac{1}{2} = \frac{\square}{4}$$



$$\frac{3}{4} = \frac{6}{\square}$$



$$\frac{2}{6} = \frac{1}{\square}$$

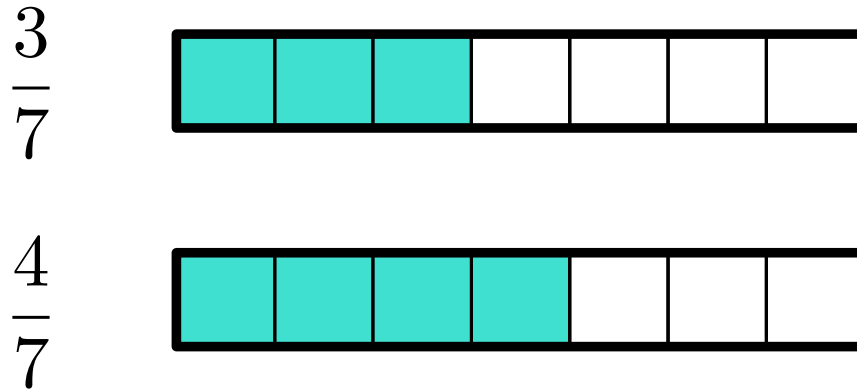


Comparación de fracciones

- * Muy relacionada con la equivalencia.

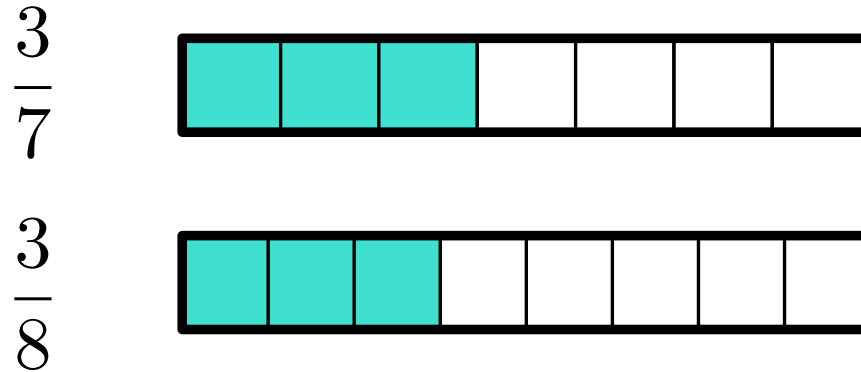
Si queremos que los alumnos comprendan, y no que memoricen, hay que huir de “recetas” y comparar usando **representaciones gráficas** (o físicas).

- * El caso más sencillo: **mismo denominador**.



Comparación de fracciones

- * Siguiente paso: mismo numerador.



- * Después: comparación con una fracción conocida:

a) $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{5}$

b) $\frac{7}{8}$ y $\frac{8}{9}$

- * Busca un razonamiento para el caso b) que se puede generalizar, por ejemplo, para comparar $\frac{15}{16}$ y $\frac{22}{23}$.

Fracciones equivalentes: caso general

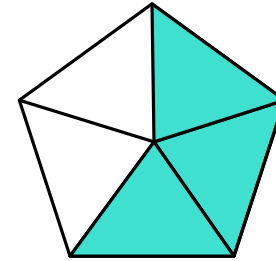
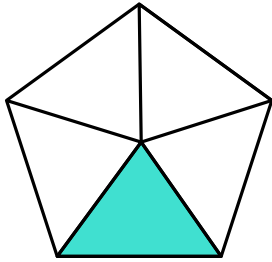
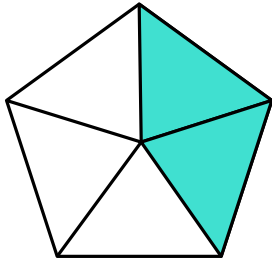
* ¿Son equivalentes las fracciones $\frac{8}{14}$ y $\frac{12}{21}$?

* ¿Cómo podemos comparar $\frac{7}{12}$ y $\frac{13}{23}$?

* ¿Son actividades adecuadas para primaria?

Suma de fracciones

- * Un posible problema del enfoque más extendido:



$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

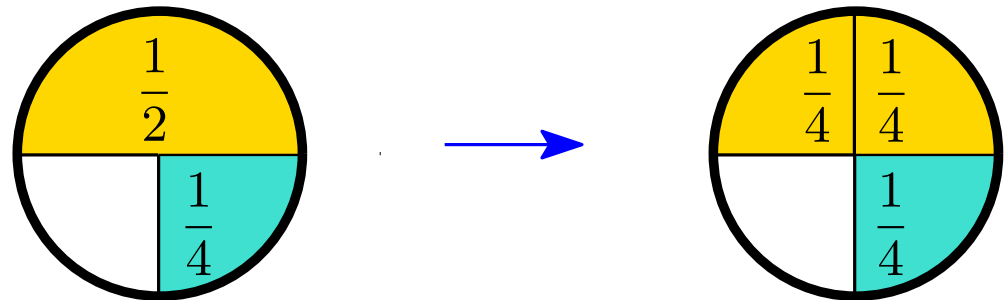
Suma de fracciones

- * En lugar de “dar la receta”, ayudar a dar pasos hacia ella.
(Zona de desarrollo próximo – Vygotsky)

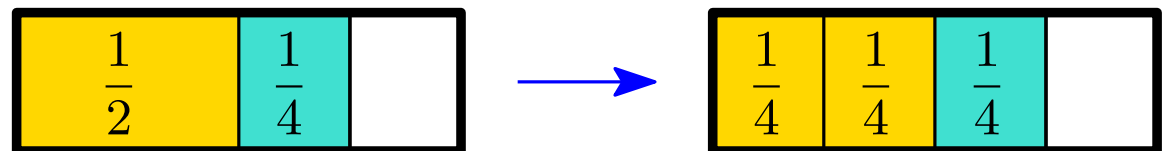
$$\frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{\square}{6} + \frac{\square}{6} =$$

- * Es importante, al principio, mostrar el **significado** de lo que hacemos.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

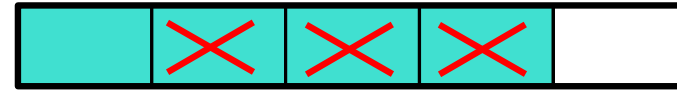
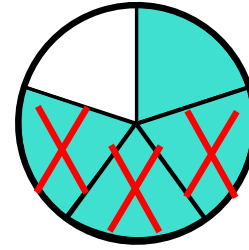


Fracciones
relacionadas



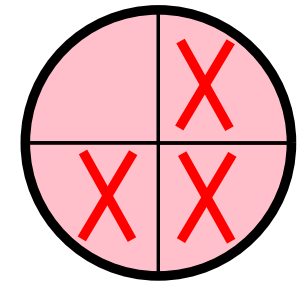
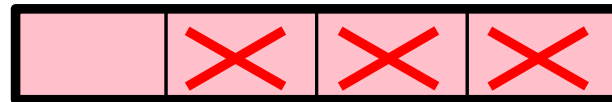
Resta de fracciones (mismo denominador)

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$



- * Dos amigos compraron una tarta y se comieron entre los dos $\frac{3}{4}$ de la tarta. ¿Cuánta tarta sobró?

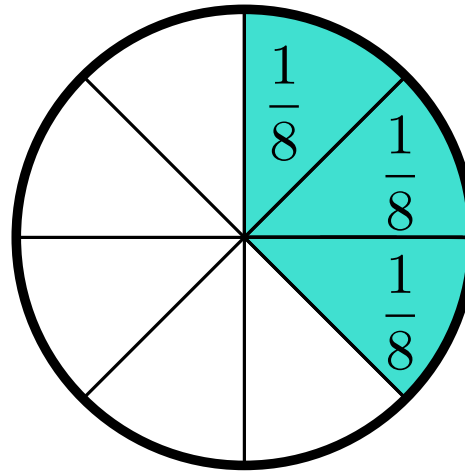
$$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$



- * ¿Es necesario/conveniente escribir $1 - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$?

Resta de fracciones

$$\frac{3}{8} - \frac{1}{4} =$$



El caso general

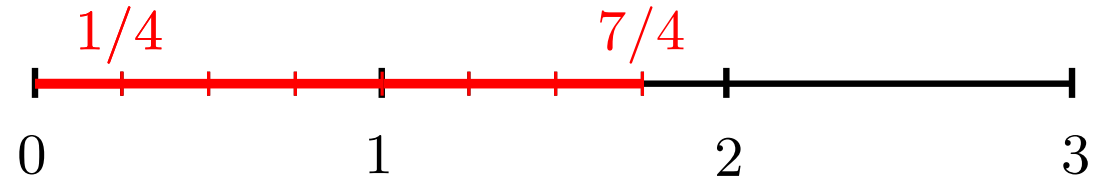
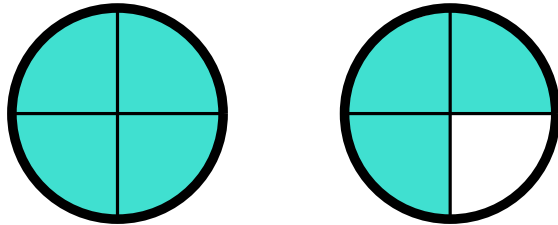
- * ¿Qué denominador utilizar?

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} =$$

- * Una reflexión pendiente: la complejidad de los cálculos que pedimos en cada etapa.
- * Las representaciones (concretas, visuales) ayudan cuando los números son pequeños. En cierto momento, hay que avanzar al terreno puramente simbólico.

Fracciones impropias

* ¿Qué significa $\frac{7}{4}$?



La recta numérica

* Ayuda a entender que $\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4}$

¿Números mixtos?

* Esta interpretación será especialmente útil cuando aparezcan los números decimales.

Modelo de barras y fracciones

1. En una hora se llenan $\frac{5}{7}$ de un depósito. ¿Cuánto tiempo tarda en llenarse el depósito completo?

2. Una barra de 108 cm de largo se partió en dos piezas. Si sabemos que $\frac{3}{5}$ del trozo más grande miden lo mismo que $\frac{3}{4}$ del trozo más pequeño, ¿cuál es la longitud de cada uno de los trozos?

Problemas

1. Luis y Nuria hicieron tarjetas durante dos días. El sábado Nuria hizo 19 tarjetas más que Luis. El domingo, Nuria hizo 20 tarjetas, y Luis hizo 15. Al acabar los dos días, comprobamos que Nuria hizo $\frac{3}{5}$ del total de las tarjetas. ¿Cuántas tarjetas hizo Luis?
2. Al principio teníamos el triple de zumo de naranja que de zumo de piña. Después de bebernos 270 ml de cada hay 9 veces más de zumo de naranja que de zumo de piña. ¿Cuánto zumo de naranja había al principio?

Multiplicación de fracciones

- * Desde el punto de vista del algoritmo, multiplicar fracciones es más sencillo que sumarlas. Sin embargo, desde un punto de vista conceptual es mucho más complicado.

- * Vamos a ir paso a paso:

i) $5 \times \frac{2}{3}$ cinco veces dos tercios

Es importante cómo la interpretamos, cómo la **verbalizamos**.

“cinco veces dos tercios”

Multiplicación de fracciones

ii) Fracción de una cantidad: $\frac{2}{3} \times 12$. dos tercios de doce

¿Cómo lo haría un alumno al que no le damos “instrucciones”?

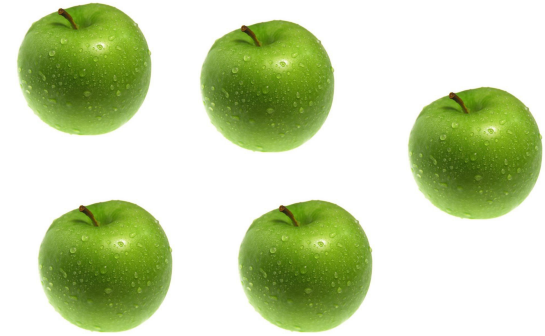


- * El procedimiento que luego usamos debería respetar esa idea.
- * Además, estamos descubriendo que multiplicar por $1/3$ es equivalente a dividir por 3.

Multiplicación de fracciones

iii) ¿Y qué pasa con $\frac{2}{3} \times 5$?

dos tercios de cinco



Un requisito previo es haber entendido la **fracción como división**, y que $\frac{1}{3} \times 5 = \frac{5}{3}$.



Multiplicación de fracciones

$$\frac{2}{3} \times 5.$$

“Dos veces un tercio de cinco”



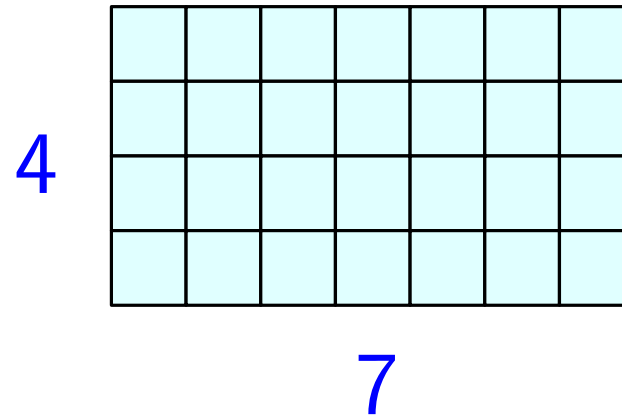
- * Como podemos ver, “dos tercios de cinco vale lo mismo que cinco veces dos tercios”.
- * Pero no **significa** lo mismo:
Piensa dos problemas, uno que se resuelva con la operación “**5 veces 2/3**” y otro que se resuelva con la operación “**2/3 de 5**”.

Multiplicación de fracciones. Modelo de área

- * Multiplicación de números naturales.

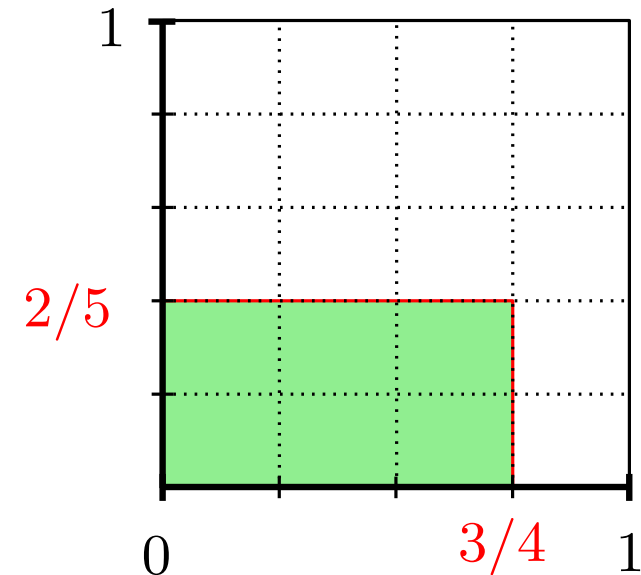
$$4 \times 7$$

$$7 \times 4$$



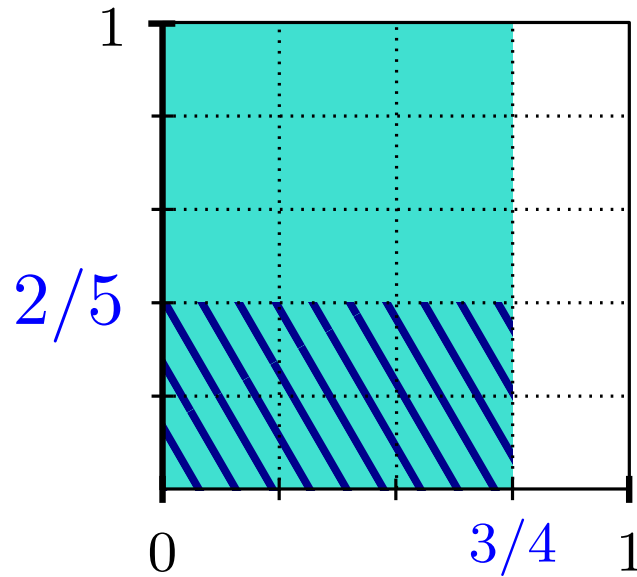
- * Queremos que siga siendo cierto para fracciones.

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$$

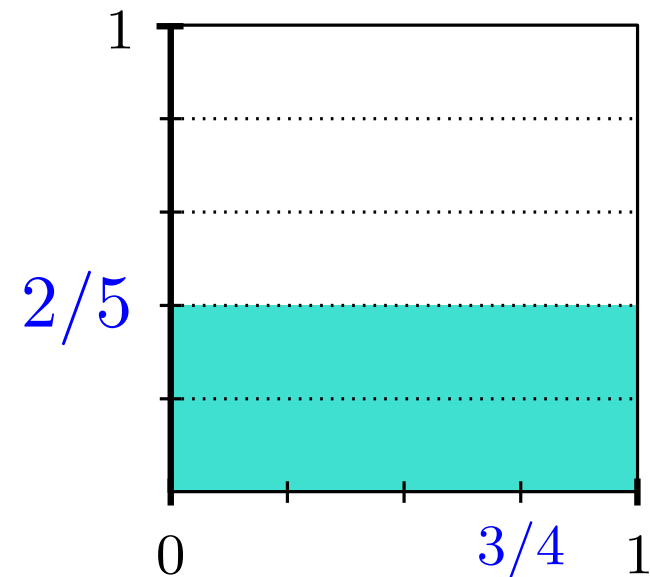


Multiplicación de fracciones. Modelo de área

* $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ significa también $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{4}$.



¿ $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$ es lo mismo que $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{4}$?



División de fracciones: primeros ejemplos

- * Cuando el divisor es un número natural:

$$\frac{4}{5} \div 2 =$$

$$\frac{3}{5} \div 2 =$$

- * Empezar así muestra que no todo es “raro” cuando aparecen las fracciones.

División de fracciones: primeros ejemplos

- * Piensa un problema o situación que le de sentido a la operación $3 : \frac{1}{2}$.

- * Con ejemplos como éste se trabaja que **dividir entre $1/n$ es equivalente a multiplicar por n** .

$$4 : \frac{1}{3} = 4 \times 3 = 12$$



Siguiente paso

- * ¿Cuántas botellas de $\frac{2}{3}$ de litro se pueden rellenar con 5 litros de agua? Calcula el resultado de manera gráfica.



- * Buscando un procedimiento general. Calcula (gráficamente)

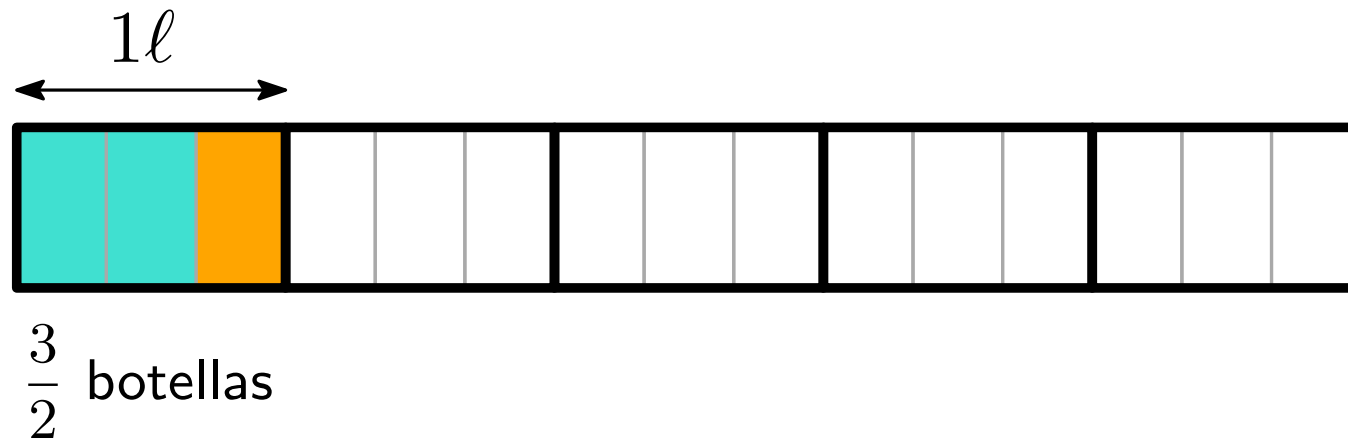
a) $1 : \frac{2}{3}$

b) $1 : \frac{3}{4}$

c) $1 : \frac{2}{5}$

Procedimiento general

- * ¿Cuántas botellas de $\frac{2}{3}$ de litro se pueden rellenar con 5 litros de agua?



- * $5 : \frac{2}{3} = 5 \times \frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7 + \frac{1}{2}$

es decir, para dividir por una fracción, se multiplica por su **inversa** (la fracción “dada la vuelta”)

Otra opción: común denominador

- * Calcula la división de fracciones $\frac{7}{4} \div \frac{1}{2}$ **reduciendo a común denominador** e interpreta gráficamente el procedimiento.



- * Dos opciones para la división de fracciones:

$$1. \quad \frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$$

$$2. \quad \frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{15}{20} \div \frac{8}{20} = \frac{15}{8}$$

- * ¿Ventajas e inconvenientes?

- * Un recurso: plantillas variadas (en inglés).

<https://www.learningresources.com/media/pdf/lr/resources/Encyclopedia-of-Math-Blackline-Masters.pdf>