INTRODUCCIÓN A LA COMBINATORIA MEDIANTE JUEGOS

Por Beatriz Manso Castellot

Nivel: 4 ESO Matemáticas Académicas

Duración: cada juego tendrá una duración de aproximadamente 1 hora (las fases de ampliación convendría desarrollarlas en otra sesión aparte)

Material: caramelos de igual color y otros de diferentes colores y formas y acuarelas

JUEGO 1 : PERMUTACIONES

El objetivo de este juego es comprender las permutaciones sin repetición y el concepto de factorial de un número desde la propia experimentación.

Desarrollo de la actividad:

Fase 1: dividimos la clase en grupos de 3 y 4 personas, a cada grupo se le entregarán tantos caramelos diferentes como miembros del grupo y deben calcular, de forma razonada en papel, de cuántas formas se pueden repartir. (Nota: proponer que usen diagramas de árbol)

Fase 2: los grupos de 3 se juntan en grupos de 6 y los grupos de 4 se reordenan para conseguir grupos de 5. De nuevo se reparten a cada grupo tantos caramelos diferentes como miembros y calculan de cuántas formas se pueden repartir.

Fase 3: puesta en común en la pizarra. Entre todos los grupos debe completarse el siguiente cuadro:

	1 p	2 p	3 personas	4 personas	5 personas	6 personas
1 premio						
2 premios						
3 premios						
4 premios						
5 premios						
6 premios						

Fase 4: explicamos el concepto de factorial, su definición exclusiva para números enteros positivos (naturales) y el convenio de 0!=1. Anotar la fórmula de permutaciones: $\boldsymbol{P_m = m!}$ e insistir en la importancia del ORDEN a la hora de asignar elementos, que era SIN REPETICIÓN y que se toman TODOS LOS ELEMENTOS.

Fase 5: aprender a calcular factoriales usando la calculadora (Nota: proponer que calculen -9! Y después (-9)! en la calculadora y expliquen por qué da error en el segundo caso)

Fase 6: ampliación a permutaciones con repetición: volvemos a grupos de 3 y 4, pero ahora dos o tres de los caramelos entregados a cada grupo serán idénticos, deben calcular de cuántas formas se pueden repartir. Explicar la fórmula de permutaciones con repetición: $\boldsymbol{P_m^{a,b} = \frac{m!}{a!\,b!}}$ Y cómo se reducen las posibilidades.

Fase 7: ampliación a permutaciones circulares:

- 2 alumnos salen a la pizarra y se colocan en círculo, ¿cuántas posibilidades de ordenación hay?
- 3 alumnos salen a la pizarra y se colocan en círculo, ¿cuántas posibilidades de ordenación hay?
- 4 alumnos salen a la pizarra y se colocan en círculo, ¿cuántas posibilidades de ordenación hay?

Explicamos la fórmula de permutaciones circulares: $\boldsymbol{PC_m = P_{m-1} = (m-1)!}$

JUEGO 2: VARIACIONES

El objetivo de este juego es comprender las variaciones con y sin repetición

Desarrollo de la actividad:

Fase 1: dividimos la clase en grupos de 4 personas, a cada grupo se le entregará inicialmente un caramelo, después dos caramelos diferentes, después tres caramelos diferentes. En cada caso deben calcular de cuántas formas se pueden repartir entre los miembros del equipo.(Nota: se puede hacer sin caramelos, formando por ejemplo palabras con unas ciertas letras dadas)

Fase 2: puesta en común en la pizarra, deben completar los huecos del cuadro de la sesión anterior:

	1 p	2 p	3 personas	4 personas	5 personas	6 personas
1 premio	$1=V_1^1$					
2 premios		$2=2!=V_2^2$				
3 premios			$3x2=6=3!=V_3^3$			
4 premios				$4x3x2=24=4!=V_4^4$		
5 premios					$5x4x3x2=120=5!=V_5^5$	
6 premios						$6x5x4x3x2=720=6!=V_6^6$

Fase 3: explicamos la fórmula de variación: $\boldsymbol{V_m^n = \frac{m!}{(m-n)!} = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdots(m-n+1)}$ e insistimos en la importancia del ORDEN a la hora de asignar elementos, que era SIN REPETICIÓN y que ahora se toman ALGUNOS ELEMENTOS. Es también importante que entiendan que cuando en una variación toman todos los elementos, entonces es una permutación $\boldsymbol{V_m^m = P_m = m!}$.

Fase 4: aprender a calcular variaciones usando la calculadora

Fase 5: ampliación a variaciones con repetición: volvemos a grupos de 4 personas, ahora trabajaremos con las cifras del 0 al 9, deberán calcular cuántos números de dos cifras hay y después, cuántos números de dos cifras no repetidas hay. Repetirán la actividad para números de 3 y cuatro cifras.

Haremos una puesta en común de resultados en la pizarra y se explica la fórmula: $\boldsymbol{VR_m^n = m^n}$

JUEGO 3: COMBINACIONES

El objetivo de esta actividad es comprender las combinaciones con y sin repetición

Fase 1: trabajo individual con acuarelas de varios colores, unos alumnos trabajarán con cuatro colores, otros con cinco, otros con seis colores. En una lámina deben obtener todos los posibles colores mezclando sólo dos acuarelas. Después deben repetir la actividad pero ahora mezclando tres acuarelas. En cada mezcla deben apuntar debajo qué colores usaron y comprobar que no dejan ninguna posibilidad sin realizar.

Fase 2: compartimos los resultados en la pizarra:

	2 acuarelas	3 acuarelas	4 acuarelas	5 acuarelas	6 acuarelas
2 colores					
3 colores					

Fase 3: explicamos la fórmula de combinación: $\boldsymbol{C_m^n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}}$ e insistimos en que ahora NO IMPORTA EL ORDEN a la hora de asignar elementos, que era SIN REPETICIÓN y de nuevo se toman ALGUNOS ELEMENTOS.

Fase 4: aprender a calcular combinaciones usando la calculadora

Fase 5: en parejas, buscar qué relación hay entre las fórmulas de combinaciones, variaciones y permutaciones (Nota: $\boldsymbol{C_m^n} = \frac{\boldsymbol{Variaciones}}{\boldsymbol{Permutaciones}} = \frac{\boldsymbol{V_m^n}}{\boldsymbol{P_n}} = \frac{\boldsymbol{m}!}{\boldsymbol{n}!(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})!}$)

Fase 6: ampliación a combinaciones con repetición: trabajo individual con acuarelas de 6 colores. En la lámina anterior, deben obtener todos los posibles colores mezclando sólo dos acuarelas pero ahora sí pueden repetir los colores, es decir, deben añadir mezclas de un color consigo mismo. Después deben repetir la actividad pero ahora mezclando tres acuarelas, pudiendo repetir dos o tres de los colores. En cada mezcla deben apuntar debajo qué colores usaron y comprobar que no dejan ninguna posibilidad sin realizar. Explicamos la fórmula de combinación: $\boldsymbol{CR_m^n = \binom{m+n-1}{n}}$ y deben deducir que entonces: $\boldsymbol{CR_m^n = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}}$

ACTIVIDAD 4: EL TRIÁNGULO DE TARTAGLIA Y EL BINOMIO DE NEWTON

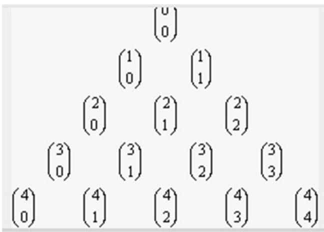
El objetivo de esta actividad es comprender las aplicaciones de los números combinatorios

Fase 1: por parejas deben calcular los siguientes productos notables de forma libre (pueden ir calculando productos de dos en dos): $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, $(a+b)^5$

Fase 2: cada pareja debe completar la siguiente tabla:

<table>
<tr><td>a+b</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">a</td><td colspan="2">b</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>$(a+b)^2$</td><td colspan="2">a^2</td><td colspan="4">ab</td><td colspan="2">b^2</td></tr>
<tr><td>$(a+b)^3$</td><td colspan="2">a^3</td><td colspan="2">a^2b</td><td colspan="2">ab^2</td><td colspan="2">b^3</td></tr>
<tr><td>$(a+b)^4$</td><td>a^4</td><td colspan="2">a^3b</td><td colspan="2">a^2b^2</td><td colspan="2">ab^3</td><td>b^4</td></tr>
<tr><td>$(a+b)^5$</td><td>a^5</td><td>a^4b</td><td colspan="2">a^3b^2</td><td colspan="2">a^2b^3</td><td>ab^4</td><td>b^5</td></tr>
</table>

Fase 3: dibujar en el cuaderno el triángulo de Tartaglia y el asociado al binomio de Newton



Fase 4: ver el video del canal de Derivando con Eduardo Sáenz de Cabezón: https://youtu.be/DPxIbJ-Rbf4

MÉTODO DUA APLICADO EN EL DISEÑO DE LAS ACTIVIDADES

1. Múltiples formas de compromiso

1.1. Captar el interés

Cada una de las actividades está diseñada para que suponga un desafío en el que el alumno debe buscar cómo resolver el problema planteado sin limitación de los recursos a utilizar.

El uso de materiales no habituales en las aulas de cuarto de la ESO, tales como caramelos o acuarelas, es sorprendente para el alumnado y una clara forma de captar su interés y atención., e introducirles en la combinatoria de una forma divertida mediante juegos.

1.2. Mantener el esfuerzo

Para mantener la atención y el esfuerzo en el tiempo, cada fase de las actividades tiene una duración entre 5 y 15 minutos, se busca evitar así que aquellos alumnos que no sean capaces por sí mismos ni con ayuda del grupo de llegar a la solución, se desanimen y "desconecten". Y además se promueve la colaboración y la comunicación ya que no se busca la competición entre equipos sino la colaboración.

Aunque no se especifica en los juegos, al terminar el segundo y como recompensa por el trabajo realizado, deberíamos dejar que cada grupo se coma los caramelos que han estado manipulando, es un buen incentivo para ellos y probablemente los caramelos ya no estén en condiciones de reutilizarse, especialmente teniendo en cuenta la situación COVID.

1.3. Opciones para autorregulación

Se propone a los alumnos usar herramientas tales como el diagrama de árbol, la calculadora, dibujos, manipulación de objetos y de mezclas de acuarelas…para facilitar estrategias a la hora de afrontar los desafíos. Se busca promover la colaboración pero también la reflexión personal como, por ejemplo, en la actividad 3 donde el trabajo es individual después de dos sesiones de trabajo en grupo.

2. Múltiples formas de representación

2.1. Opciones para la percepción

Se ofrecen diversas alternativas para acceder a la información, tales como el uso manipulativo de material (caramelos) y acuarelas, la utilización de diagramas de árbol para estructurar las soluciones, el uso de tablas para ordenar y sistematizar la información, el uso de la calculadora para agilizar las cuentas o la representación física con los alumnos de las permutaciones cíclicas.

Además, tanto en la puesta en común en la pizarra como al trabajar en grupo en varias actividades, se promueve la expresión y verbalización de las estrategias y dudas.

Y en la última actividad recurrimos a un video para acabar de asentar ideas e incitar a aquellos alumnos con más inquietudes a seguir investigando la combinatoria y buscar información por sí mismos, incitándoles a desarrollar su función ejecutiva.

2.2. Opciones para el lenguaje y los símbolos

Se introduce simbología nueva, tales como el factorial ! o las combinaciones $\binom{m}{n}$, y se promueve su aplicación y conexión con la simbología que usan las calculadoras: 7C4 o 5P

2.3. Opciones para la comprensión

Mediante la manipulación de los caramelos intentamos activar conocimientos y experiencias previas (p.e.: todos hemos tenido que repartirnos caramelos con amigos en alguna ocasión). Además, empezamos estudiando las permutaciones para fijar un patrón sencillo a partir del cual, poco a poco, ir construyendo el resto de contenidos de la combinatoria.

Las actividades parten de situaciones concretas para, posteriormente y mediante la puesta en común, poder llegar a la generalización de cada una de las fórmulas obtenidas y patrones obtenidos para estos casos limitados y particulares con los que trabajan los alumnos.

3. Múltiples formas de Acción y expresión

3.1. Opciones para la acción física

Para facilitar cierta acción física, en algunas actividades tras las primeras fases se reordenan los grupos, permitiendo a los alumnos levantarse de la silla y moverse por el aula durante unos momentos.

Y para explicar las permutaciones cíclicas, los alumnos deben levantarse e ir formando círculos de tamaño variable y contabilizando cuántas posibles formas de ordenación hay.

3.2. Opciones para la expresión y la comunicación

El trabajo en grupos pequeños facilita la interacción entre sus miembros y la comunicación y expresión de sus diferentes puntos de vista o estrategias para abordar el problema propuesto.

Además, los resultados alcanzados por cada grupo se ponen en común en la pizarra, lo que permite que expresen sus dudas, la forma en qué han llegado a los resultados y compartir información con otros grupos y otros puntos de vista haciendo trabajar al cerebro social.

3.3. Opciones para la función ejecutiva

Las tablas que completamos poco a poco y entre varios juegos, ayudan a la memoria de trabajo, ya que para construir y asimilar los conceptos de Variación y Combinación partimos del concepto de Permutación y factorial que se trabajan durante el primer juego.