Matemáticas Singapur
Sentido numérico y resolución de problemas

Pedro Ramos Alonso

Facultad de Educación

Universidad de Alcalá

pedro.ramos@uah.es

http://masideas-menoscuentas.com/

@MsIdeasMnosCtas

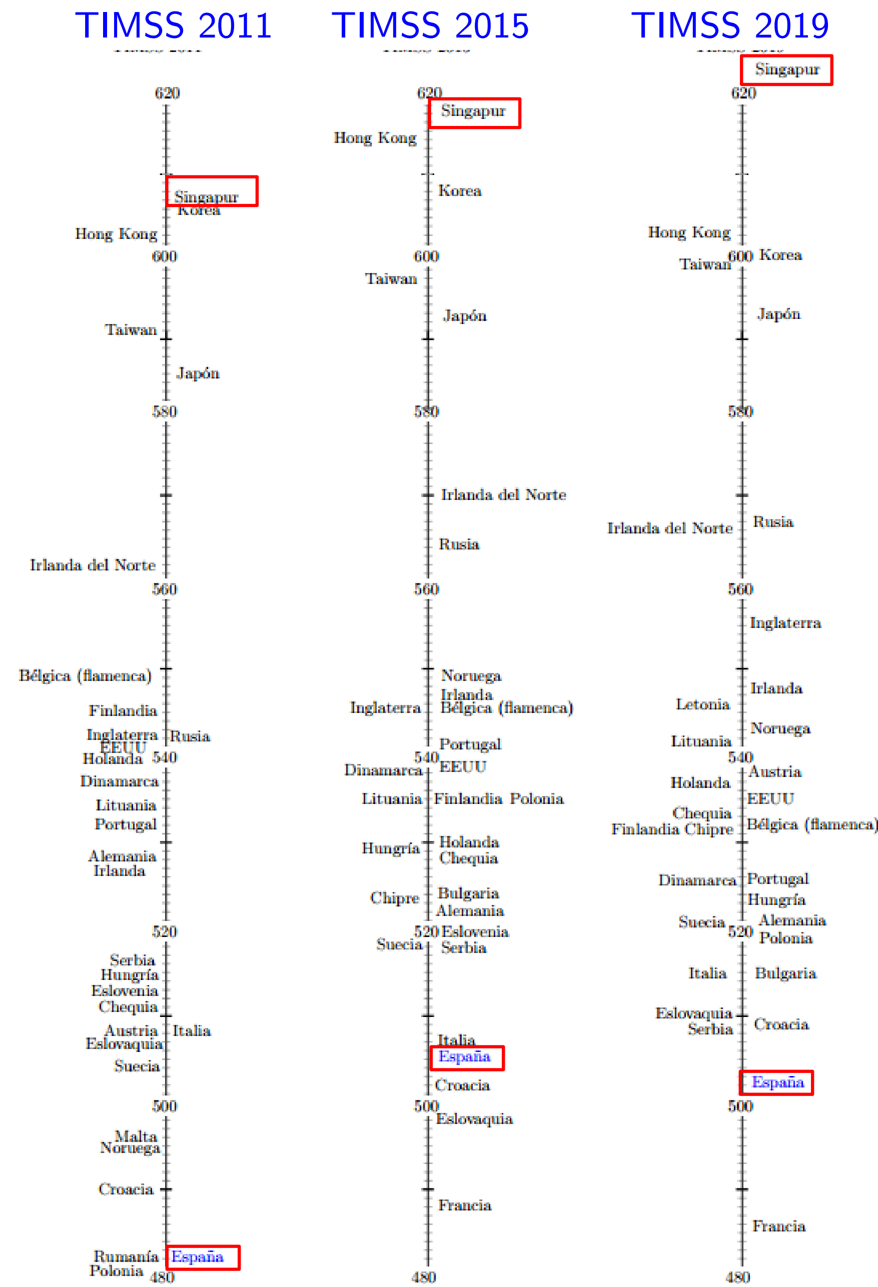
La situación actual en España

* ¿Estamos de acuerdo en que tenemos problemas?

* Información:

  https://www.educacionyfp.gob.es/inee/evaluaciones-internacionales/timss/timss-2019.html

* ¿Tenemos un diagnóstico para origen de los problemas?



Un vídeo para reflexionar

* Sobre la enseñanza de las matemáticas en Singapur en los años 70:

  https://youtu.be/3kxs5hOHpbo

* Sus errores:
  - Exceso de cálculos tediosos.
  - Aprendizaje rutinario de procedimientos, sin entenderlos.
  - Aprendizaje memorístico.

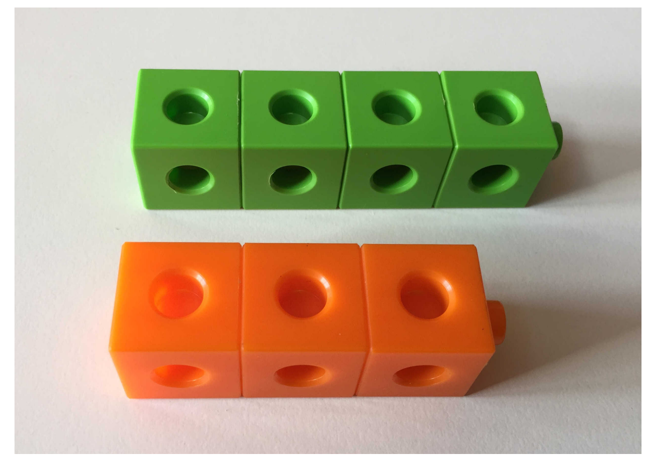
* El desarrollo de lo que se conoce como "método Singapur" fue la respuesta.

* Basado en ideas "clásicas" de la didáctica de las matemáticas occidental.

Fundamentos metodológicos

$\boxed{1}$ El aprendizaje en tres etapas (Jerome Bruner)

(1)

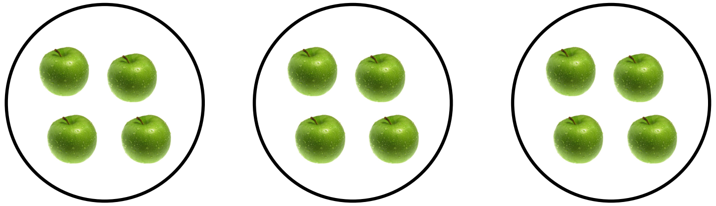


Concreta

Fundamentos metodológicos

$\boxed{1}$ El aprendizaje en tres etapas (Jerome Bruner)

¿Cuántas manzanas hay?



(2) Pictórica (gráfica, visual)

Fundamentos metodológicos

$\boxed{1}$ El aprendizaje en tres etapas (Jerome Bruner)

(3)

$$27 + 5 = 30 + 2 = \boxed{}$$

$$3 + 2$$

$$4 \times 3 = 12$$

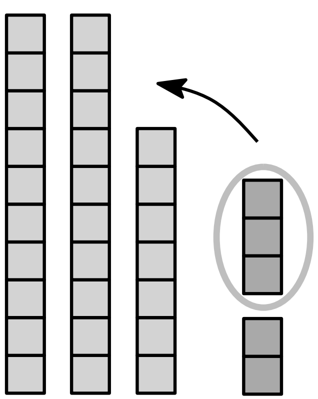
CPA

Abstracta (simbólica)

Fundamentos metodológicos

$\boxed{2}$ El aprendizaje de los procedimientos y la comprensión de los conceptos deben trabajarse en paralelo.

Richard Skemp: Relational understanding and instrumental understanding (1976)



$$27 + 5 = 30 + 2 = \boxed{}$$

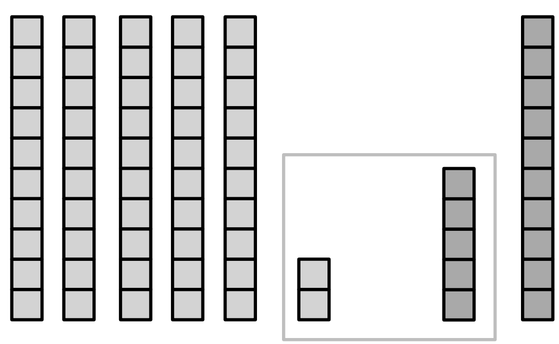
$$3 + 2$$

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 2\,7 \\ +\,5 \\ \hline 3\,2 \end{array}$$

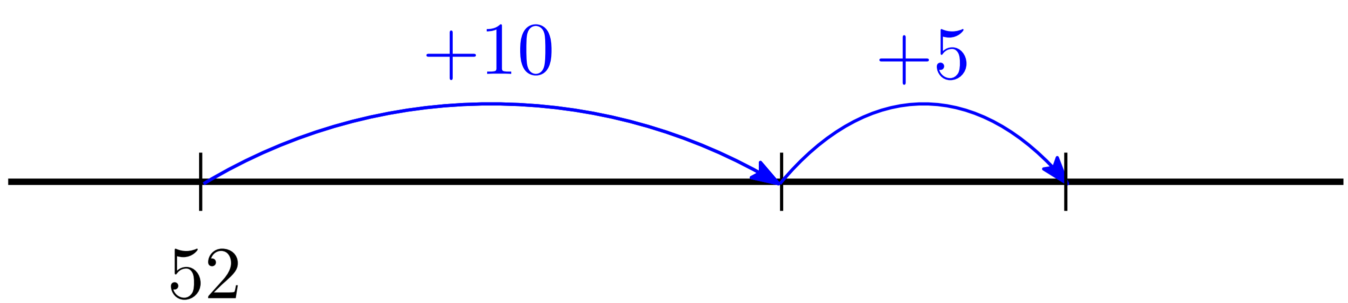
Fundamentos metodológicos

$\boxed{3}$ Variedad en las presentaciones (Zoltan Dienes)

La comprensión de un concepto es mejor si se presenta desde distintos puntos de vista.



$$52 + 15 = \boxed{}$$

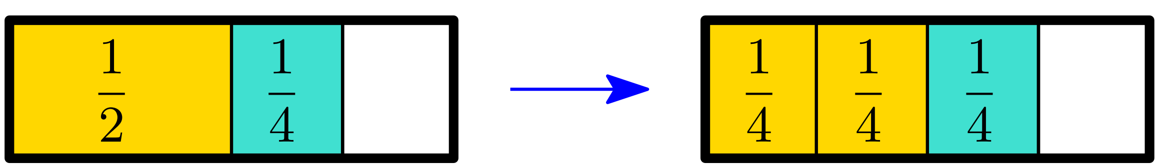


Fundamentos metodológicos

$\boxed{4}$ El andamiaje y la zona de desarrollo próximo (Vygotsky)

En lugar de ir diciendo al alumno "esto se hace así", se le proponen actividades que estén en su zona de desarrollo próximo.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$$



Fundamentos metodológicos (resumen)

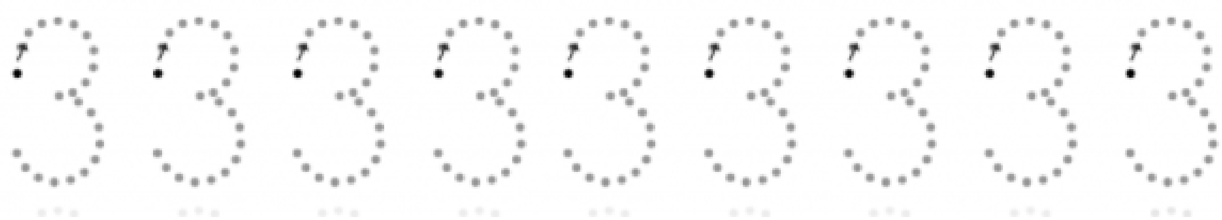
- El aprendizaje en tres etapas (Jerome Bruner)
- El aprendizaje de procedimientos y la comprensión de los conceptos deben ir en paralelo (Richard Skemp)
- La importancia de la variedad en las presentaciones (Zoltan Dienes)
- El andamiaje y la zona de desarrollo próximo (Lev Vygotski)

Y un elemento adicional:

- La importancia de la verbalización.

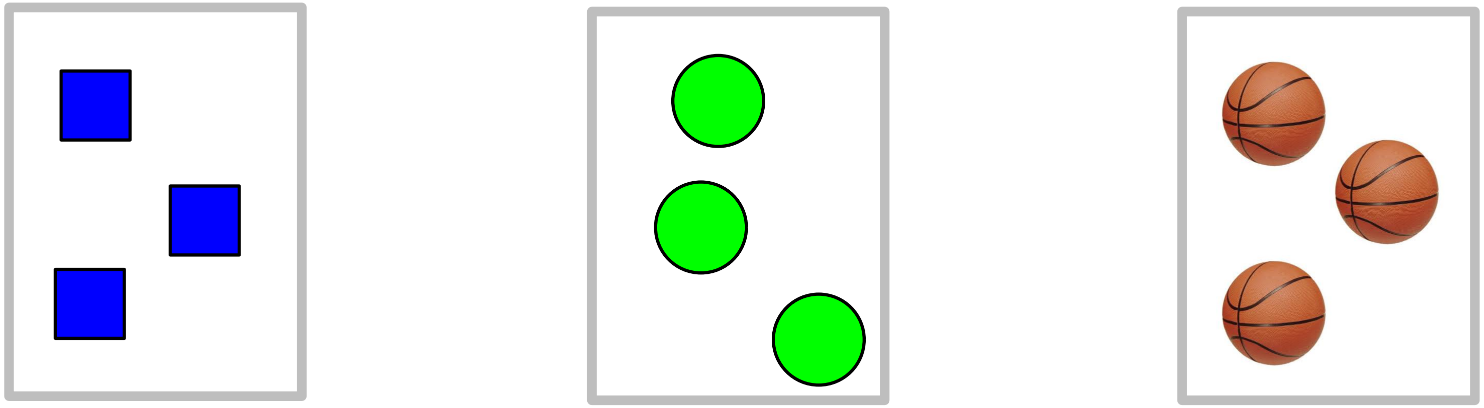
Los inicios con los números

* En este curso nos vamos a centrar en los inicios con la aritmética y en la resolución de problemas.
* ¿Cuál es (o debería ser) el objetivo fundamental de aprendizaje (sobre números) durante la educación infantil?
* El desarrollo del sentido numérico.
* ¿Qué es el número tres?



* La lectoescritura de los números requiere cierto trabajo (que no tiene contenido matemático).
* Debemos aprender a contar (memorizar la secuencia numérica) dotando a la actividad de significado.

Los inicios con los números - El sentido numérico



* El concepto de tres es "lo que tienen en común" estos conjuntos.

* Una dificultad de aprendizaje común en las primeras etapas: asignar el "tres" al tercer elemento, en lugar de al cardinal del conjunto.

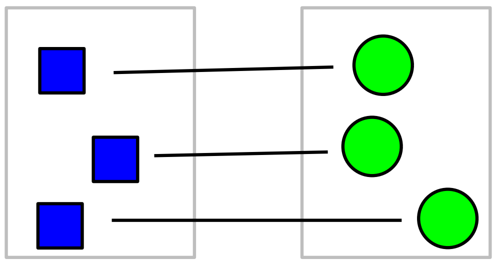
¿cómo evitarla?

Comparar conjuntos

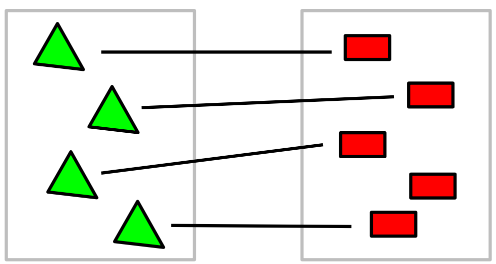
* Importante para el desarrollo del sentido numérico.

$\boxed{1}$ ¿Hay los mismos?

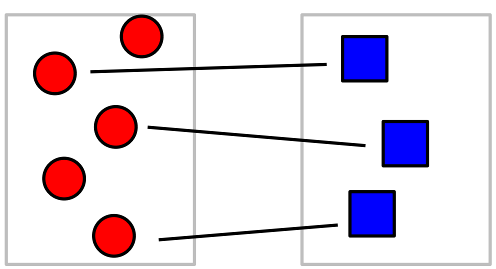
a)



b)

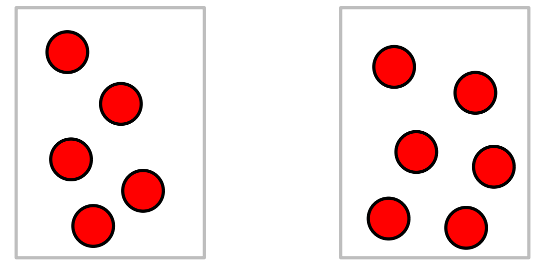


c)

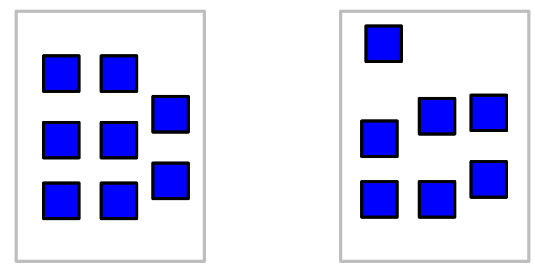


$\boxed{2}$ ¿Dónde hay más?

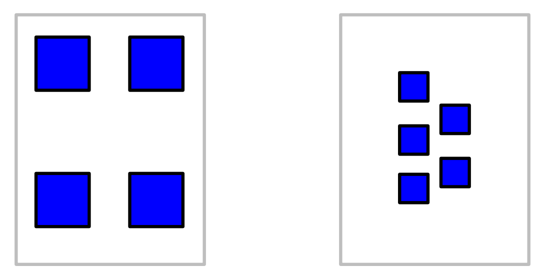
a)



b)

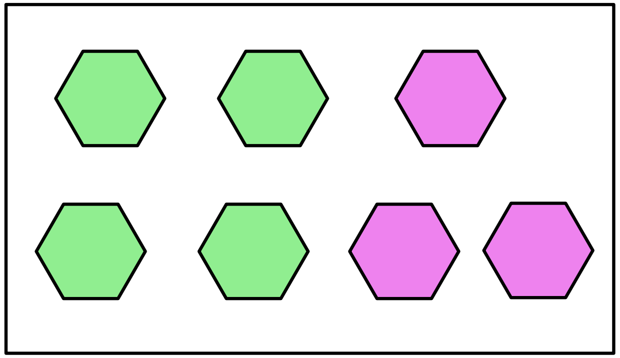


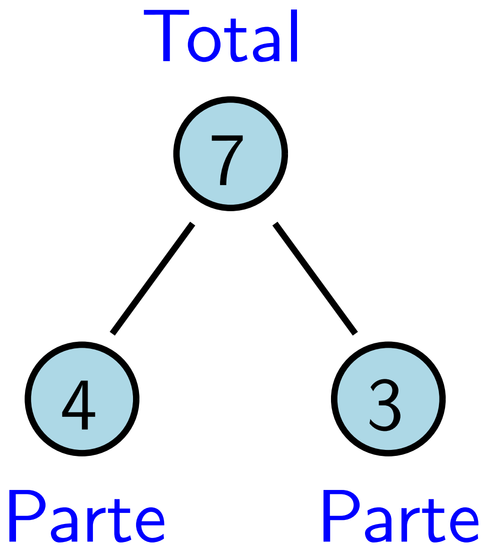
c)



De https://masideas-menoscuentas.com/2014/09/04/libro-de-1o-de-primaria/

Los números conectados



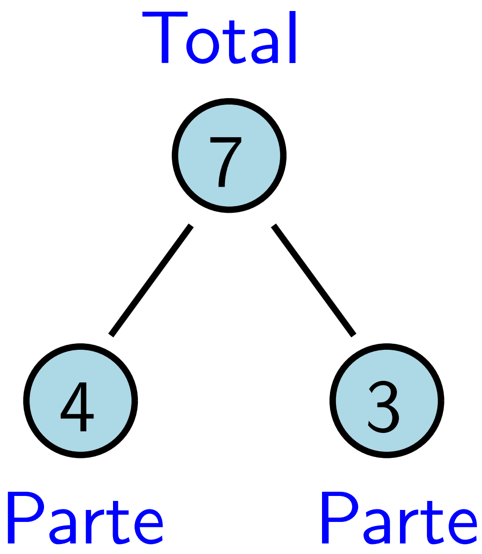


"number bonds"

cuatro y tres son siete

(esto debería ser previo a la suma)

Números conectados y policubos



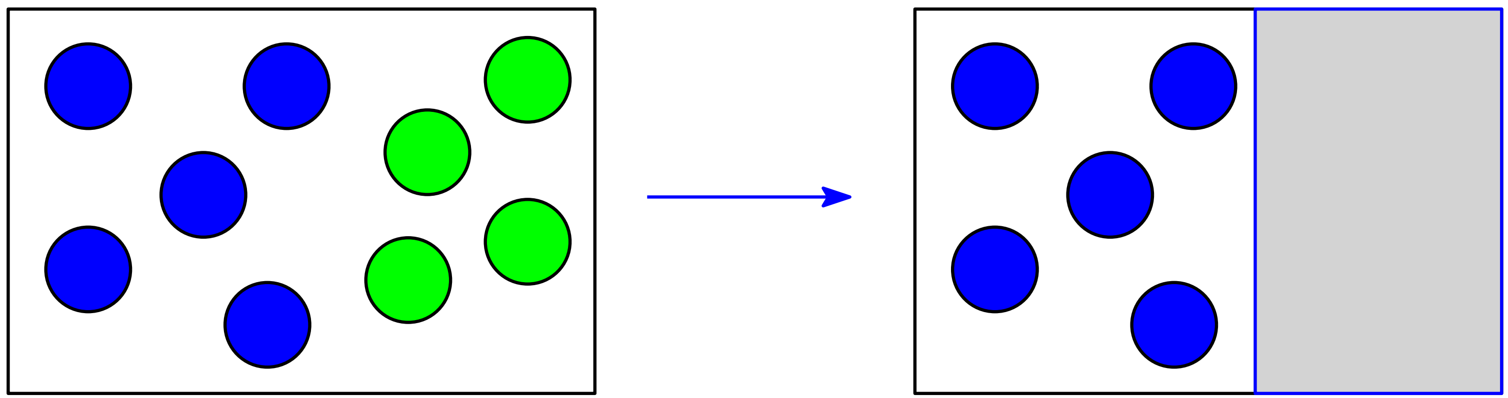
Herramienta virtual (gratuita)

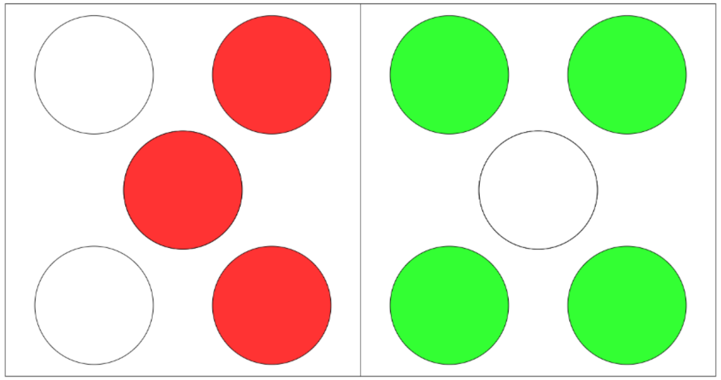
https://www.didax.com/apps/unifix/

Regletas

Descomposiciones numéricas

* Muy importante trabajarlas en profundidad.

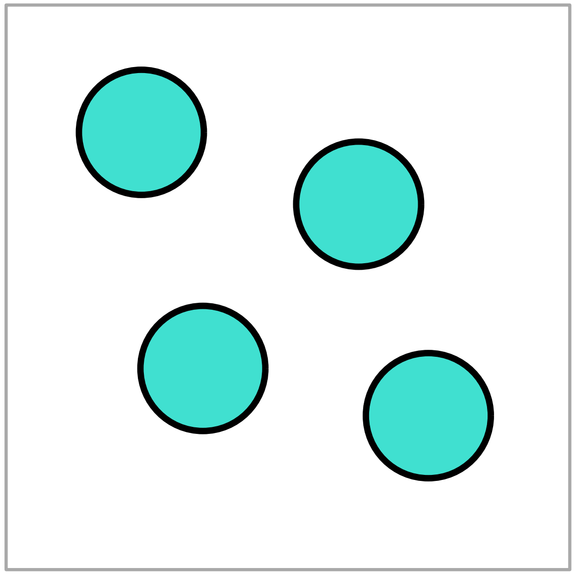




Rejilla húngara

https://mathsbot.com/manipulatives/hungarianFrame

La subitización



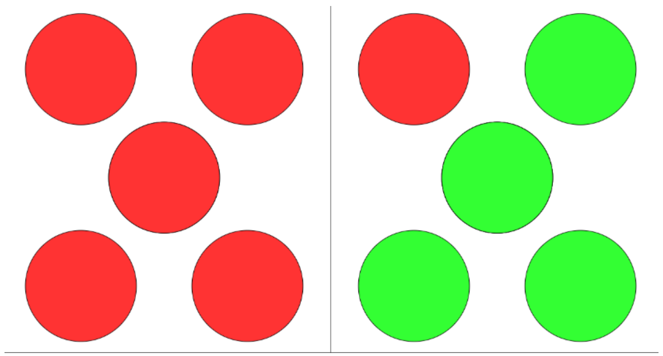
“contar sin contar”

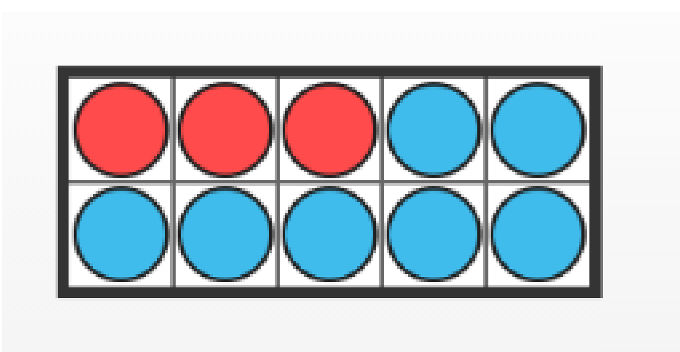
* Es una habilidad que conviene trabajar (con actividades adecuadas a la madurez de los alumnos, por supuesto).

* También puede ayudar para trabajar la descomposición de los números.

Descomposiciones del 10

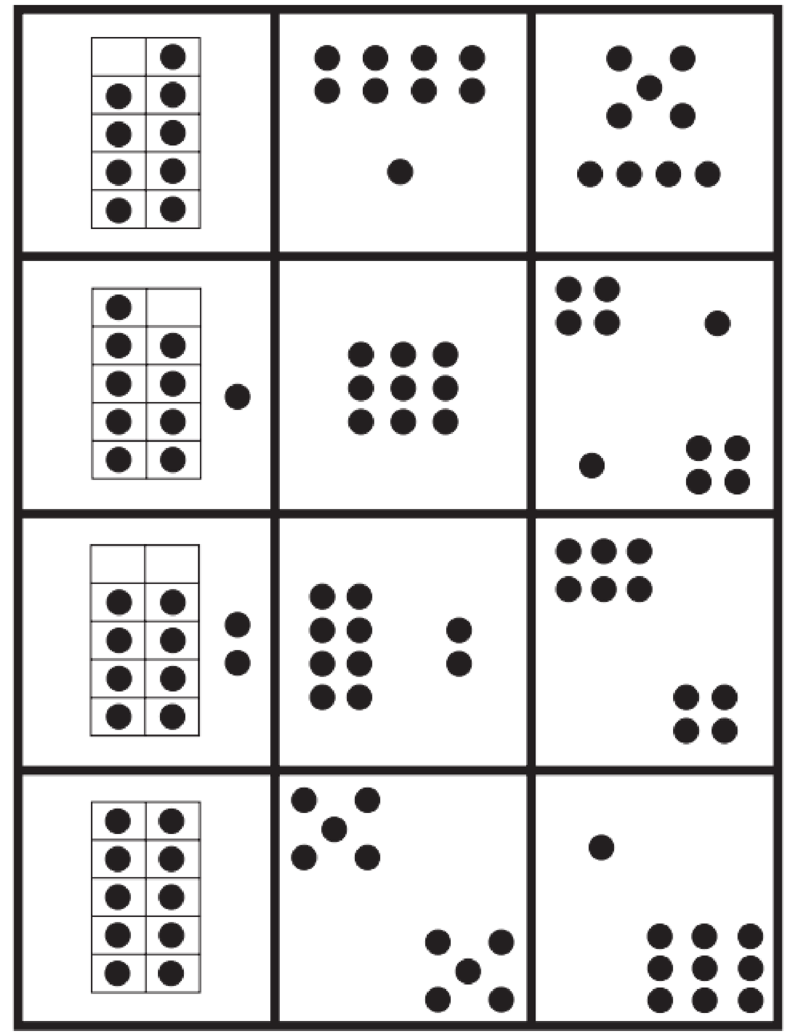
* Serán especialmente importantes cuando los números crezcan.





https://www.mathlearningcenter.org/resources/apps

Tarjetas de puntos



BLM 5
Dot Cards (c)

Materiales

policubos

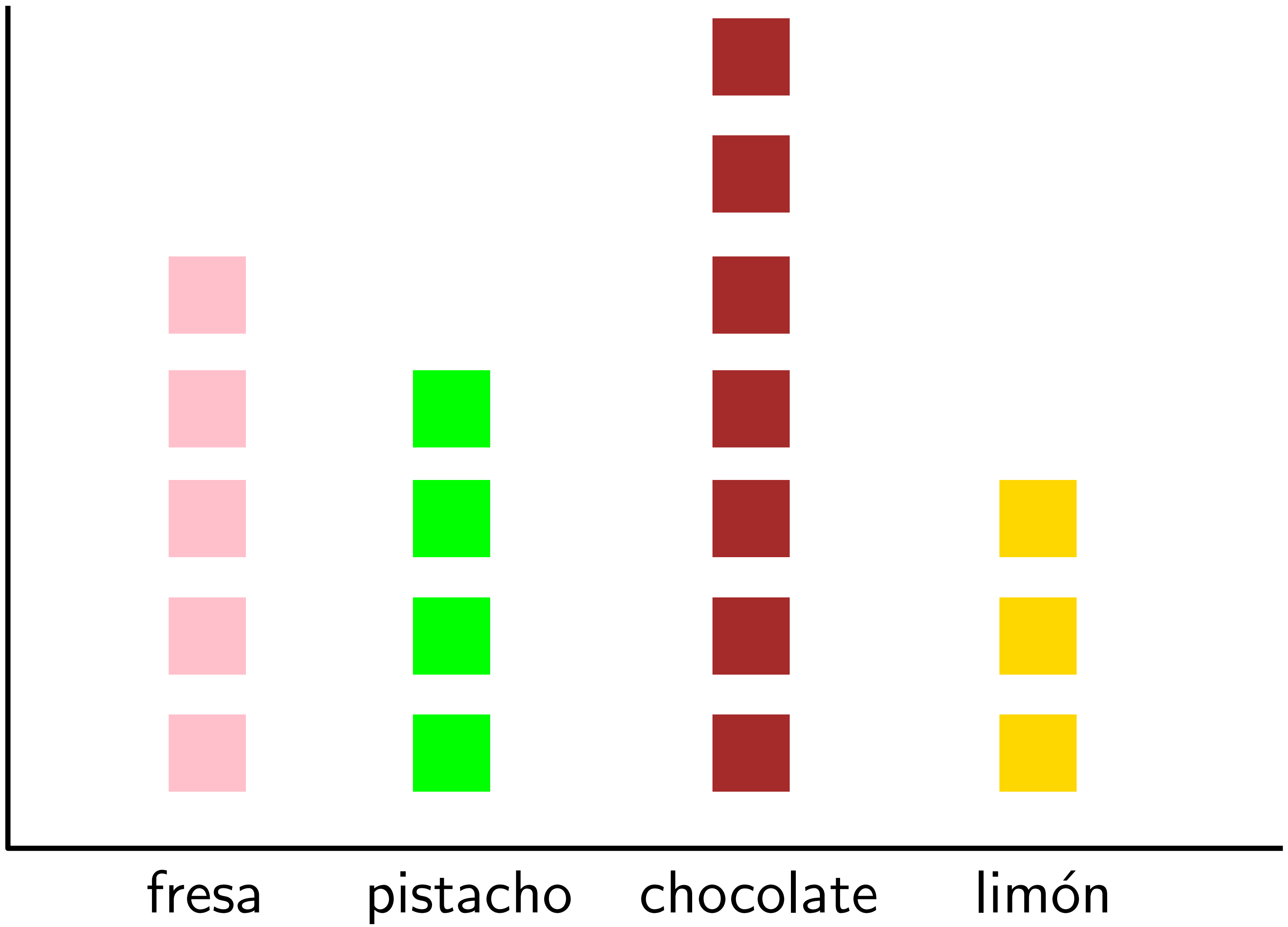
cubos encajables

Primeras preguntas/problemas

* Alicia tiene 2 caramelos más que Benito. Benito tiene 5 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene Alicia?

* Preguntas de este tipo ayudan a establecer relaciones del tipo “dos más”, “dos menos”, que son importantes para desarrollar el sentido numérico.
* Importante: con materiales manipulativos.

Representación de datos y sentido numérico



Formas de sumar

1. Sumar contando.
   a) contar todo.
   b) contar desde un sumando – el mayor.

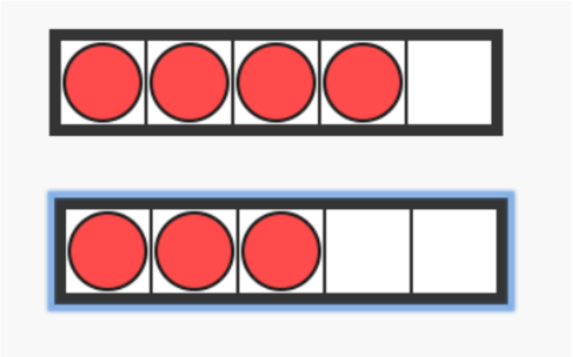
2. Sumar sin contar.

   Fundamental desarrollar estrategias antes de empezar con el algoritmo tradicional.

   Hay que trabajarlo de forma gradual, primero hasta el 10.

Estrategias de iniciación a la suma

* Rejillas numéricas (grupos de 5).



* Otras estrategias: usar los dobles, la compensación ...
* El uso de materiales es fundamental.

$$4 + 5 = 4 + 4 + 1 =$$

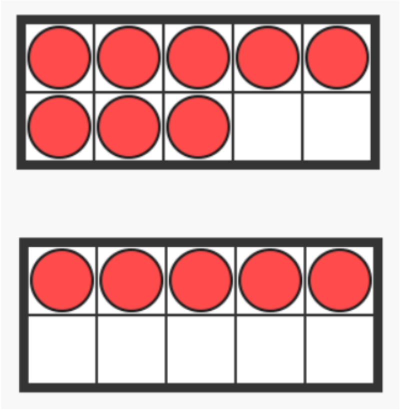
$$5 + 3 = 4 + 4 =$$

Actividad: suma de dos números de una cifra

* Piensa diferentes estrategias para calcular $8 + 5$.

$8 + 5 =$ "diez y tres"

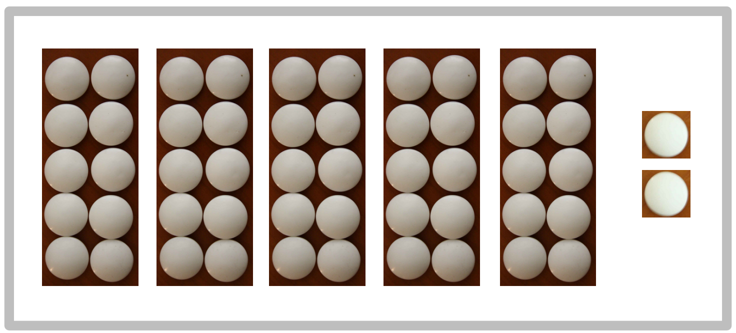
https://www.mathlearningcenter.org/resources/apps



El número de dos cifras

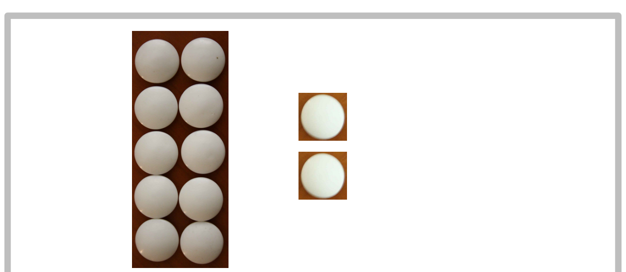
* Enfoque “tradicional”: ábaco y fichas de colores

* Alternativa: hacemos grupos de diez.
  Los materiales, de nuevo fundamentales.



_____ decenas y _____ unidades

_____ dieces y _____ unos



12

diez y dos

se escribe **doce**

El número de dos cifras

* Bloques de base 10

* Una alternativa online:
https://apps.mathlearningcenter.org/number-pieces/

Algoritmos de la suma

* ¿Qué algoritmos para la suma son útiles si creemos que el aprendizaje de los procedimientos y la comprensión de los conceptos deben trabajarse en paralelo?

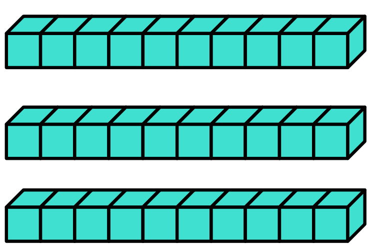
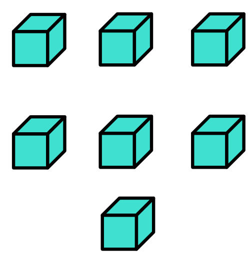
* Primero, lo que no me parece una buena alternativa.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1\ \ } \\ 5\ 7\ 4 \\ +\ 3\ 6\ 9 \\ \hline 9\ 4\ 3 \end{array}$$

Algoritmos de la suma

* Hay formas muy distintas de presentar el "algoritmo tradicional".

Tabla de valor posicional

decenas	unidades
dieces	unos
	

37

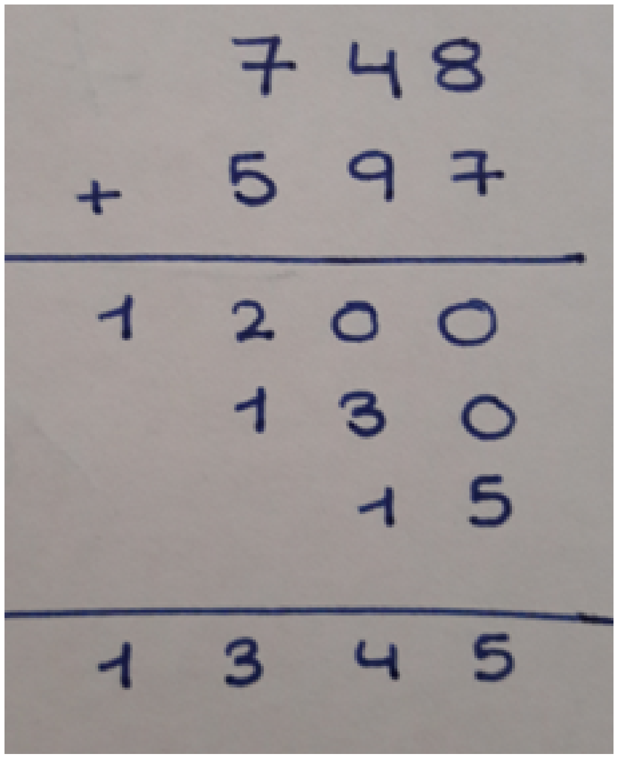
Actividad

* Utiliza los bloques de base 10 para representar estos números, y calcula estas sumas, haciendo con los materiales los reagrupamientos (llevadas) necesarios.

$$\begin{array}{r} 4\,7 \\ +\,2\,5 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 3\,6\,3 \\ +\,1\,7\,4 \\ \hline \end{array}$$

Algoritmos de la suma

* Y hay algoritmos “alternativos”:



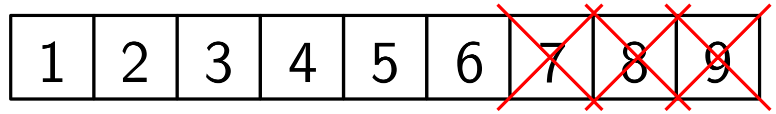
36 + 43		
	Quedan	Suma
	36	43
6	30	49
1	29	50
9	20	59
20	0	79

ABN

* Temas para la reflexión: ¿ventajas e inconvenientes? ¿Es necesario el estudio de un algoritmo “formal”?

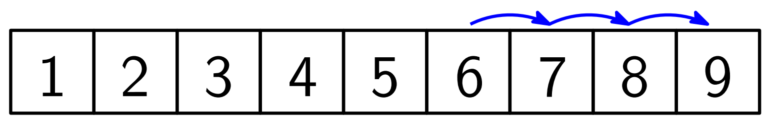
La resta

"De 9 quitamos 3"



$$9 - 3 = \boxed{}$$

"Del 6 al 9 van ..."



$$9 - 6 = \boxed{}$$

$\ast$ Hay que trabajar los dos significados.

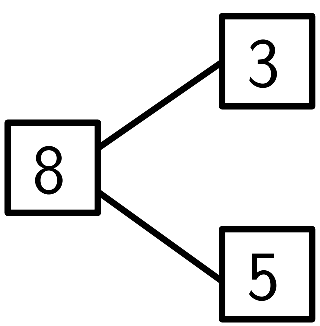
Formas de restar

1. Restar contando.
   a) restar quitando.
   b) contar desde el menor.

2. Restar sin contar.

   Fundamental desarrollar estrategias antes de empezar con el algoritmo tradicional.

* La conexión con la suma es fundamental.
* Los números conectados son una herramienta muy útil.

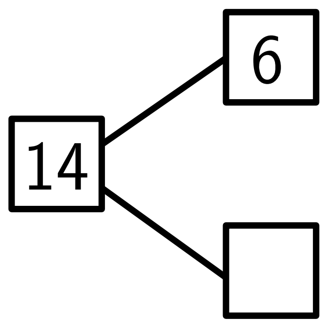


$$3 + 5 = 8 \qquad 8 - 5 = 3$$

$$5 + 3 = 8 \qquad 8 - 3 = 5$$

Actividad

* Piensa estrategias para calcular $14 - 6$ (sin contar).



$$14 - 6 =$$

$4 \qquad 2$

“Quitar de 10”

$$14 - 6 =$$

$4 \qquad 10$

$$10 - 6 = 4$$

$$4 + 4 = 8$$

Algoritmos para la resta

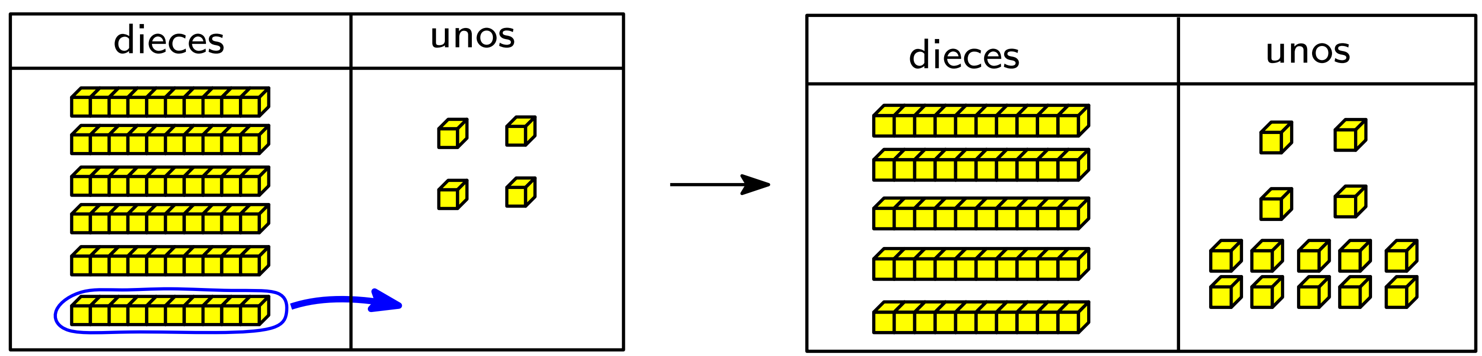
El algoritmo tradicional
(en España)

$$\begin{array}{r} 6\ 4 \\ -\ \ 4\ 8 \\ \hline 1\ 6 \end{array}$$

* Una alternativa (ya bastante extendida en nuestras aulas):

$$\begin{array}{r} 6\ 4 \\ -\ \ 4\ 8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr} & \overset{5}{\cancel{6}} & \overset{14}{\cancel{4}} \\ - & 4 & 8 \\ \hline \end{array}$$



* Restamos quitando $\rightarrow$ solo representamos el minuendo.

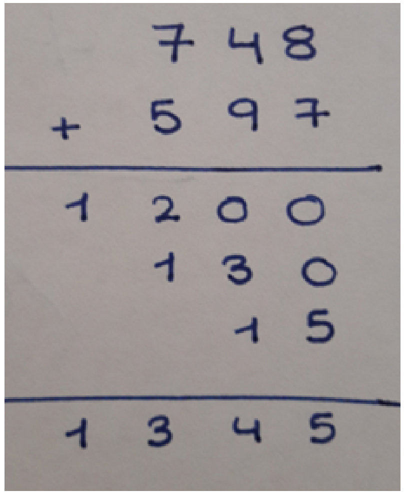
Actividad

* Utiliza los bloques de base 10 para calcular estas restas, haciendo con los materiales los reagrupamientos necesarios.

$$\begin{array}{r} 5\,3 \\ -\ 1\,8 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\,0\,3 \\ -\ 1\,3\,7 \\ \hline \end{array}$$

¿Algoritmos alternativos?

- ¿Existe para la resta un análogo de este algoritmo para la suma?



- Otros algoritmos: ABN, OAOA...

¿Y el “cálculo mental”? (Cálculo razonado)

* Los números conectados y la recta numérica vacía son excelentes herramientas para desarrollar estrategias de cálculo flexible.

* Piensa diferentes estrategias para calcular:

a) $123 + 45$

b) $98 + 137$

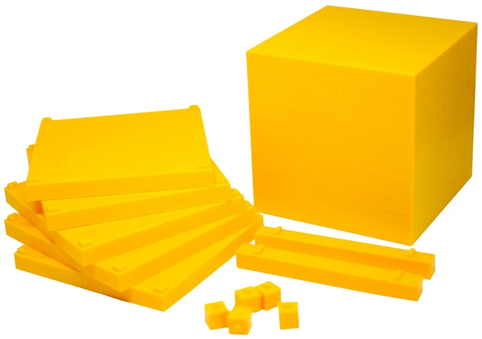
c) $145 - 28$

d) $203 - 106$

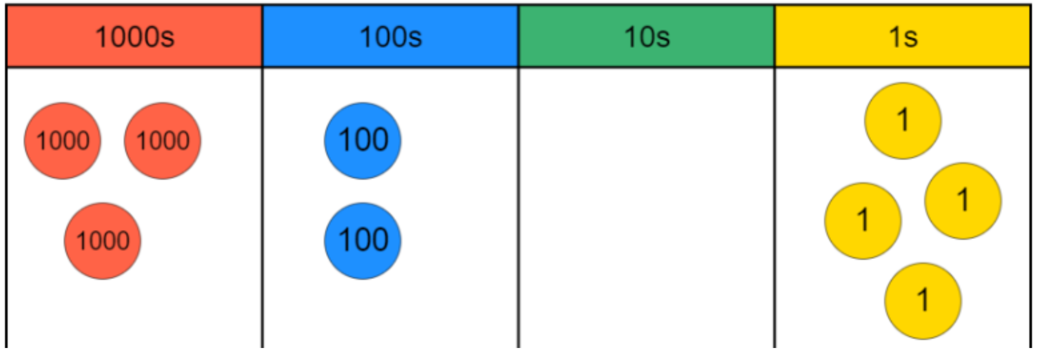
En 3.º, el grupo de mil

* Representar los números de 4 cifras con los bloques de base 10 empieza a ser poco manejable.

  Es prematuro prescindir de un apoyo en la representación (al menos para algunos alumnos).



* Las fichas numéricas (number disks) son una buena alternativa.

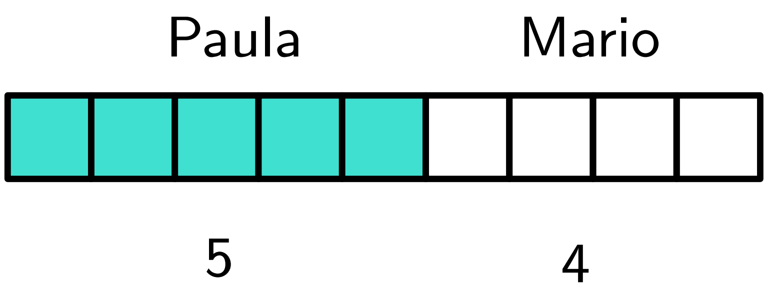


https://mathsbot.com/manipulatives/placeValueCounters

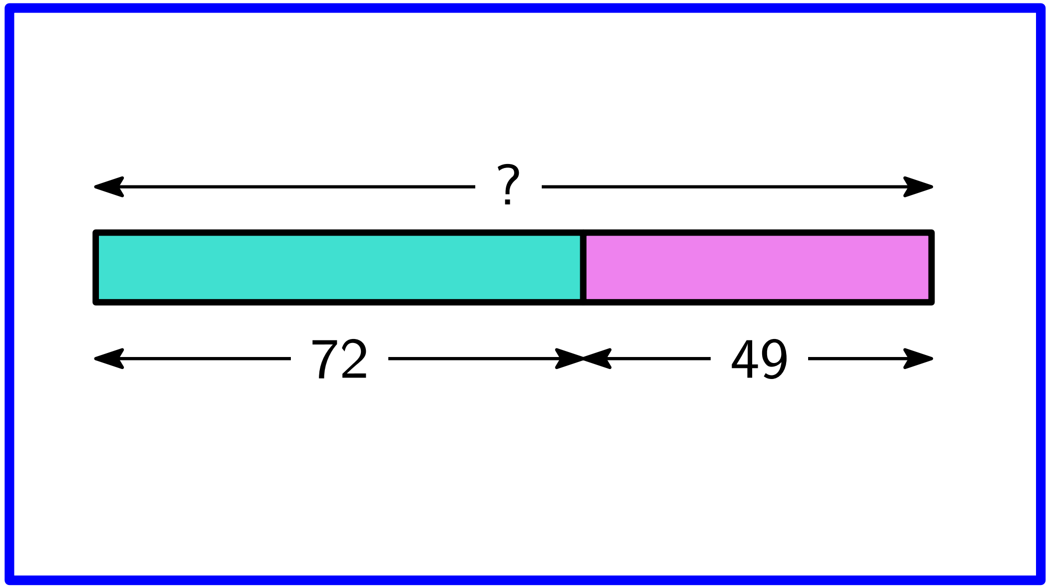
Resolución de problemas

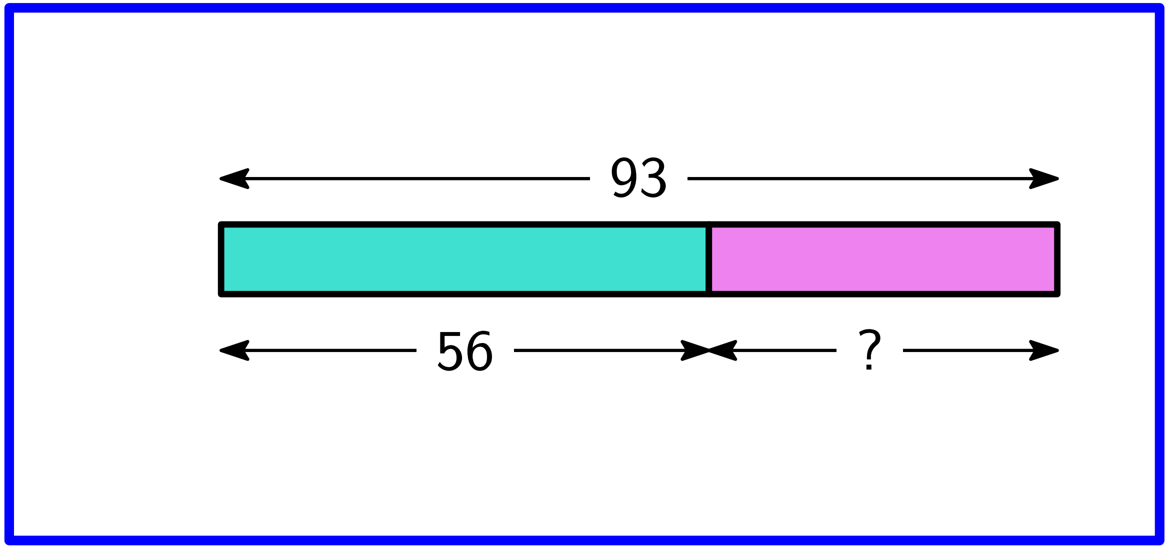
* Y este problema ... ¿es de sumar o de restar?

* Una herramienta muy útil: el modelo de barras.



Partes - Total





Observaciones

* Para que el modelo sea efectivo hay que introducirlo y trabajarlo adecuadamente.

* En el paso de representar 15 unidades explícitamente a representarlas con una barra hay una abstracción a la que hay que prestar la atención necesaria.

* En este modelo el alumno se centra en las relaciones, no en los objetos ni en las cantidades descontextualizadas.

* Los objetos son representados mediante rectángulos, un rectángulo es un objeto fácil de dibujar, de dividir. Útil para representar números más grandes y mostrar relaciones de proporcionalidad.

Modelo de comparación

* Alicia tiene 17 muñecos y Benito tiene 25 muñecos. ¿Quién tiene más muñecos? ¿Cuántos más?

* Rosa tiene 35 euros. Sabemos que Rosa tiene 14 euros más que Luis. ¿Cuánto dinero tiene Luis?

Problemas

1. Un pastelero ha hecho 35 bollos rellenos de chocolate, y también ha hecho bollos rellenos de crema. Sabemos que ha hecho 19 bollos de chocolate más que bollos de crema.
   a) ¿Cuántos bollos de crema ha hecho el pastelero?
   b) ¿Cuántos bollos ha hecho en total?

2. Jaime tiene 15 euros más que Lucía y entre los dos tienen 97 euros. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

2. Jaime tiene 15 euros más que Lucía y entre los dos tienen 97 euros. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

Problemas

1. Luis tiene 316 euros y su amiga Marta tiene 488 euros. ¿Cuánto tiene que darle Marta a Luis para que los dos se queden con la misma cantidad de dinero?
2. Tengo 765 euros y quiero repartirlos entre Alicia y Benito, de manera que Alicia reciba el doble que Benito. ¿Cuánto dinero recibirá cada uno?
3. Lisa tiene 128 euros y Pablo tiene 97 euros. Se compraron dos abrigos iguales, y después de pagar Lisa tenía el doble de dinero que Pablo. ¿Cuánto les costó el abrigo?
4. Marta tiene el doble de dinero que Pablo, y Juan tiene 13 euros menos que Marta. Si entre los tres tienen 192 euros, ¿cuánto dinero tiene cada uno?

$\ast$ Curso introductorio al modelo de barras (en abierto):
https://sites.google.com/view/modelodebarras/home

Dificultades en la resolución de problemas

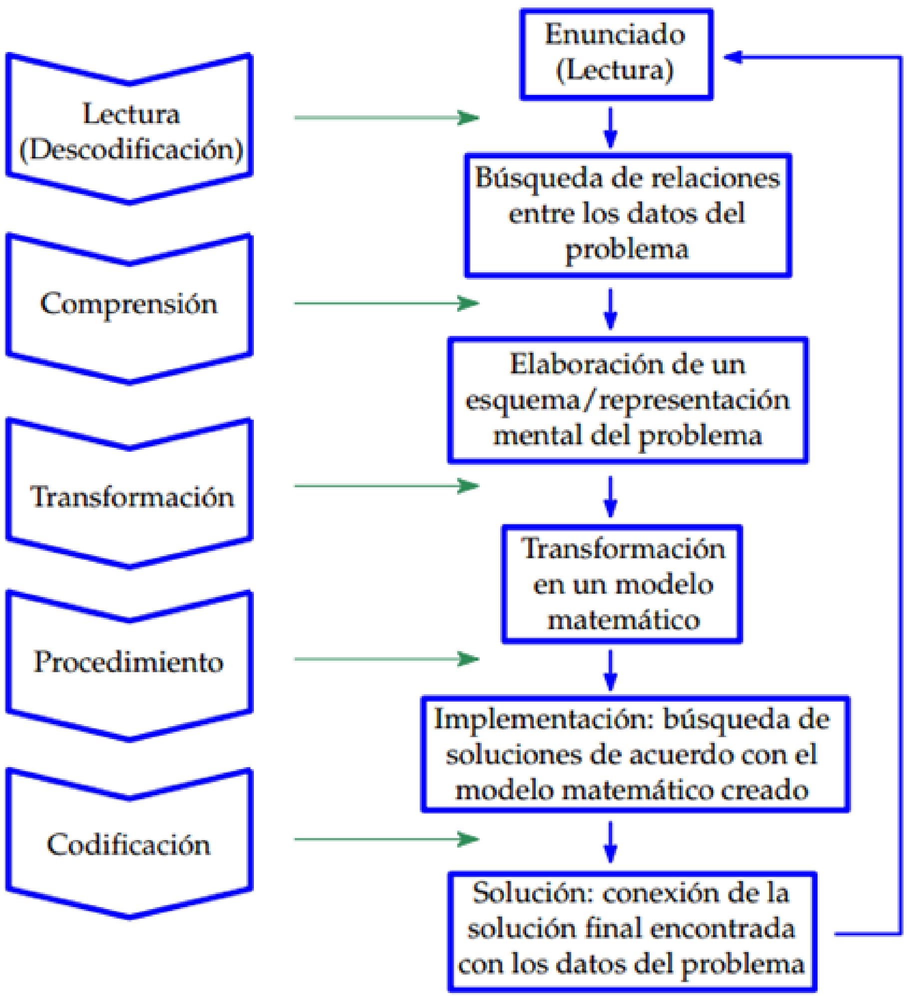


Figura 2.2: Jerarquía de errores de Newman integrada con las fases de resolución de problemas.

Arántzazu Fraile Rey: El desarrollo de actitudes valiosas para la resolución de problemas en Educación Primaria. Tesis Doctoral. Universidad de Alcalá