La divina proporción: número de oro

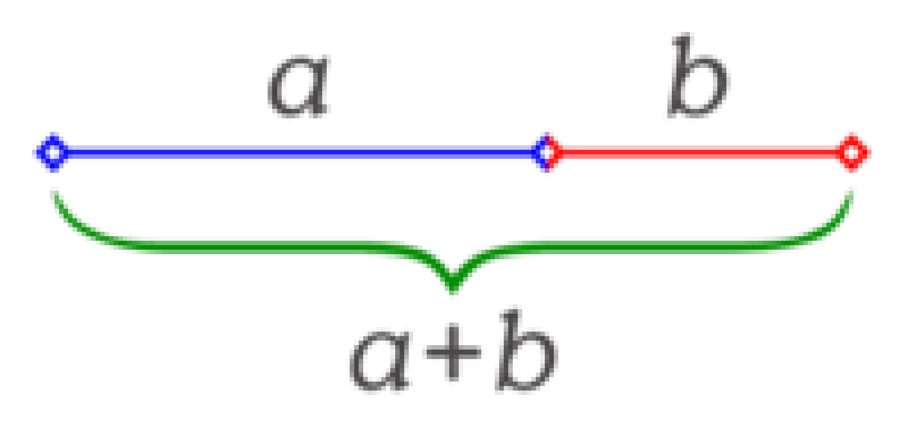
El número φ

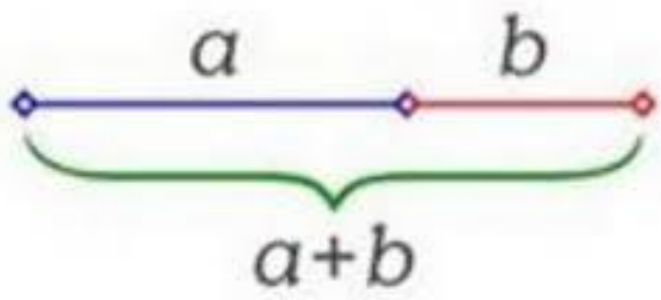
por Aida

El número áureo o de oro (divina proporción) representado por la letra griega φ (fi) (en minúscula) o Φ (fi) (en mayúscula), en honor al escultor griego Fidias, es un número irracional:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803398874989484820458683436563811772030 9...$$

Se trata de un número irracional (decimal infinito no periódico) que posee muchas propiedades interesantes y que fue descubierto en la antigüedad, no como “unidad” sino como relación o proporción entre segmentos de rectas.





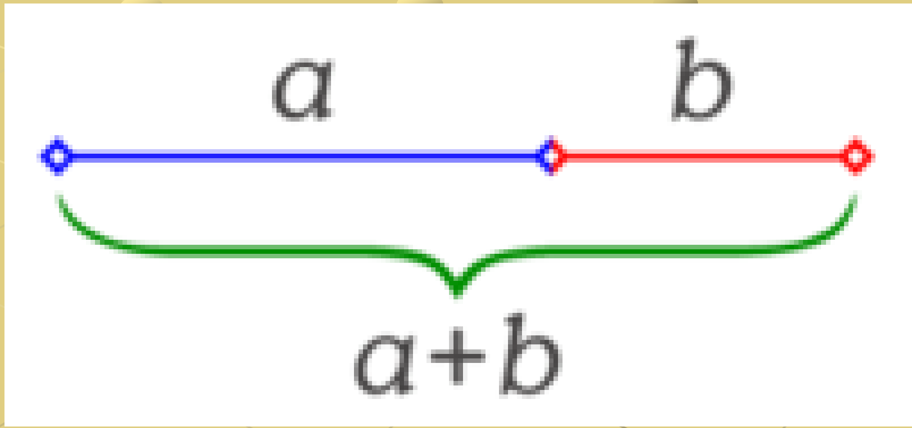
$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$

Una sección áurea es una división en dos de un segmento según proporciones dadas por el número áureo.

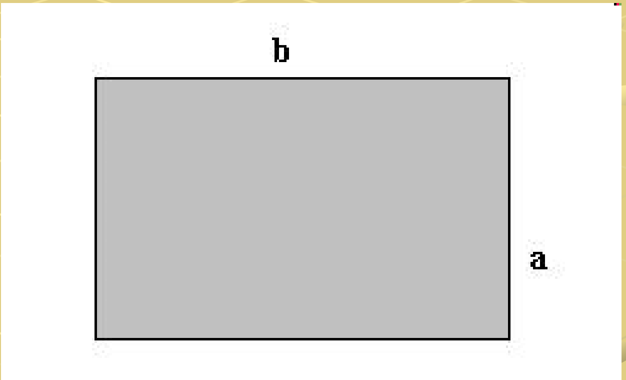
La longitud total *a+b* es al segmento más largo *a* como *a* es al segmento más corto *b*.

Se dice que dos números positivos a y b están en razón áurea si :

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$



El rectángulo áureo:



siendo la altura a y la anchura b, se cumple:

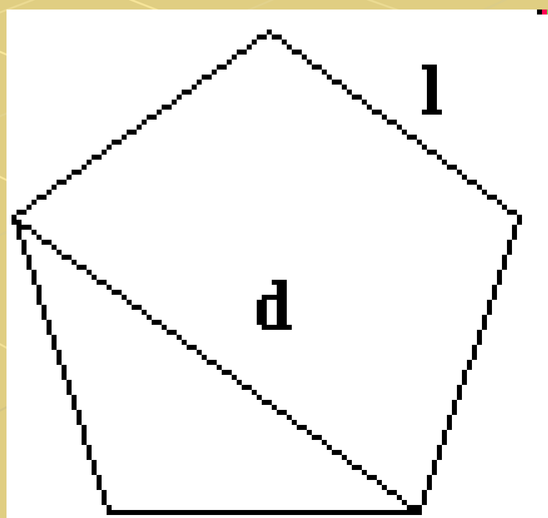
$$\frac{b}{a} = \varphi = 1'618034...$$

Esta proporción se puede encontrar en:

- Figuras geométricas.
- Naturaleza:
  - Cuerpo humano.
  - Plantas (grosor de ramas, disposición de hojas...).
  - Animales (abejas, vuelo del halcón...).
  - Galaxias.
- Avances tecnológicos (cohetes...).
- Arte: pintura.
- Arte: arquitectura.

En geometría:

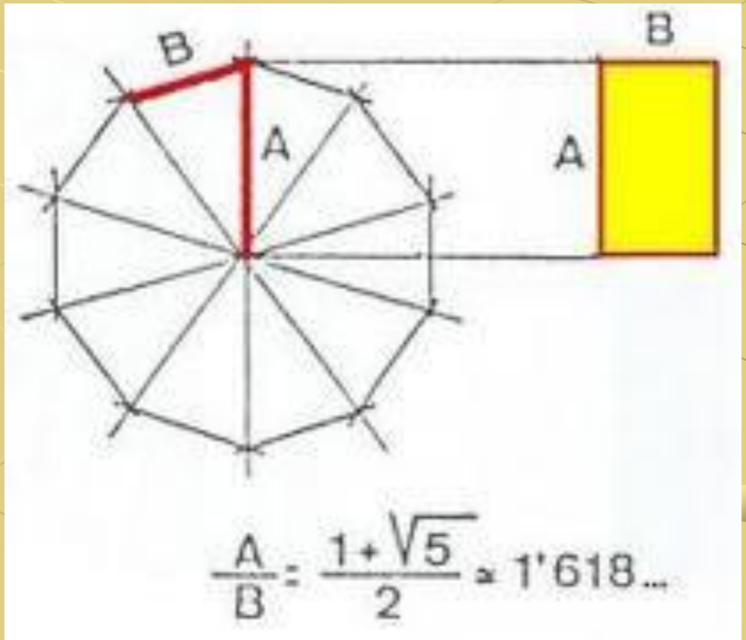
En el pentágono regular la razón entre la diagonal y el lado cumple la razón áurea: Si dividimos la diagonal entre el lado obtenemos la divina proporción.



$$\frac{d}{l} = 1{,}61\ldots$$

En geometría:

En el decágono regular, la razón entre el lado y el radio de la circunferencia circunscrita cumple la razón áurea: dividiendo el radio entre el lado obtenemos la divina proporción.



En la Naturaleza:

La relación entre la cantidad de abejas macho y abejas hembra en un panal.

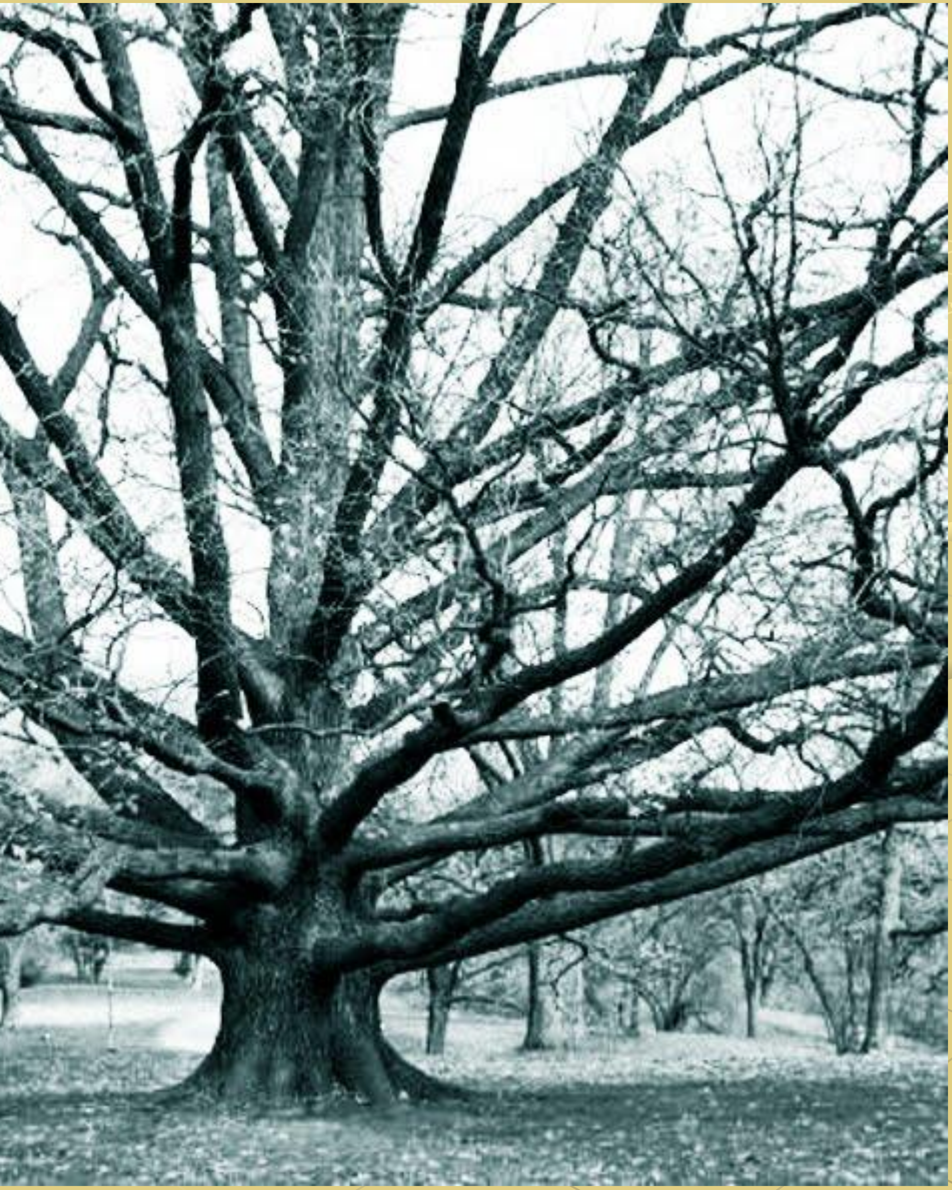
En la Naturaleza:

La disposición de los pétalos de las flores (el papel del número áureo en botánica recibe el nombre de Ley de Ludwig).

Así se consigue aprovechar el espacio horizontal más eficientemente.

En la Naturaleza:

La disposición ramificada de flores y árboles, y los puntos de un tallo en los que se insertan las hojas y ramas.



A medida que el tallo crece, las ramas no crecerán unas sobre otras, y de esta forma se aprovecha mejor la luz del sol.

En la Naturaleza:

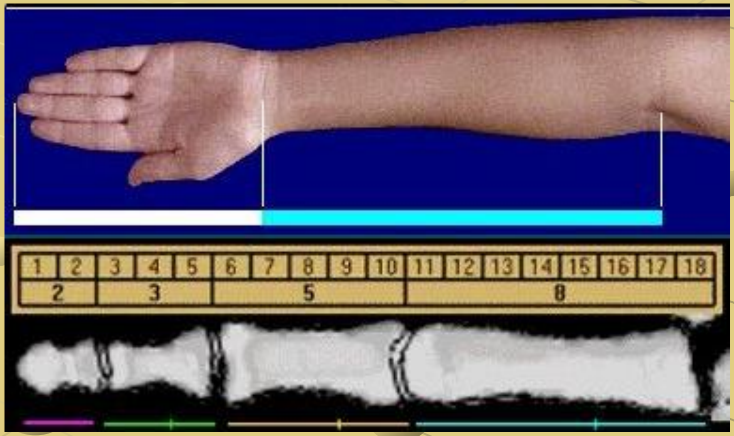
La relación entre las nervaduras de las hojas de los árboles.

En el ser humano:

En el cuerpo humano el número áureo aparece en muchas medidas: la relación entre el primer hueso de los dedos (metacarpiano) y la primera falange, o entre la primera y la segunda, o entre la segunda y la tercera, si dividimos todo es el número áureo **Φ**.

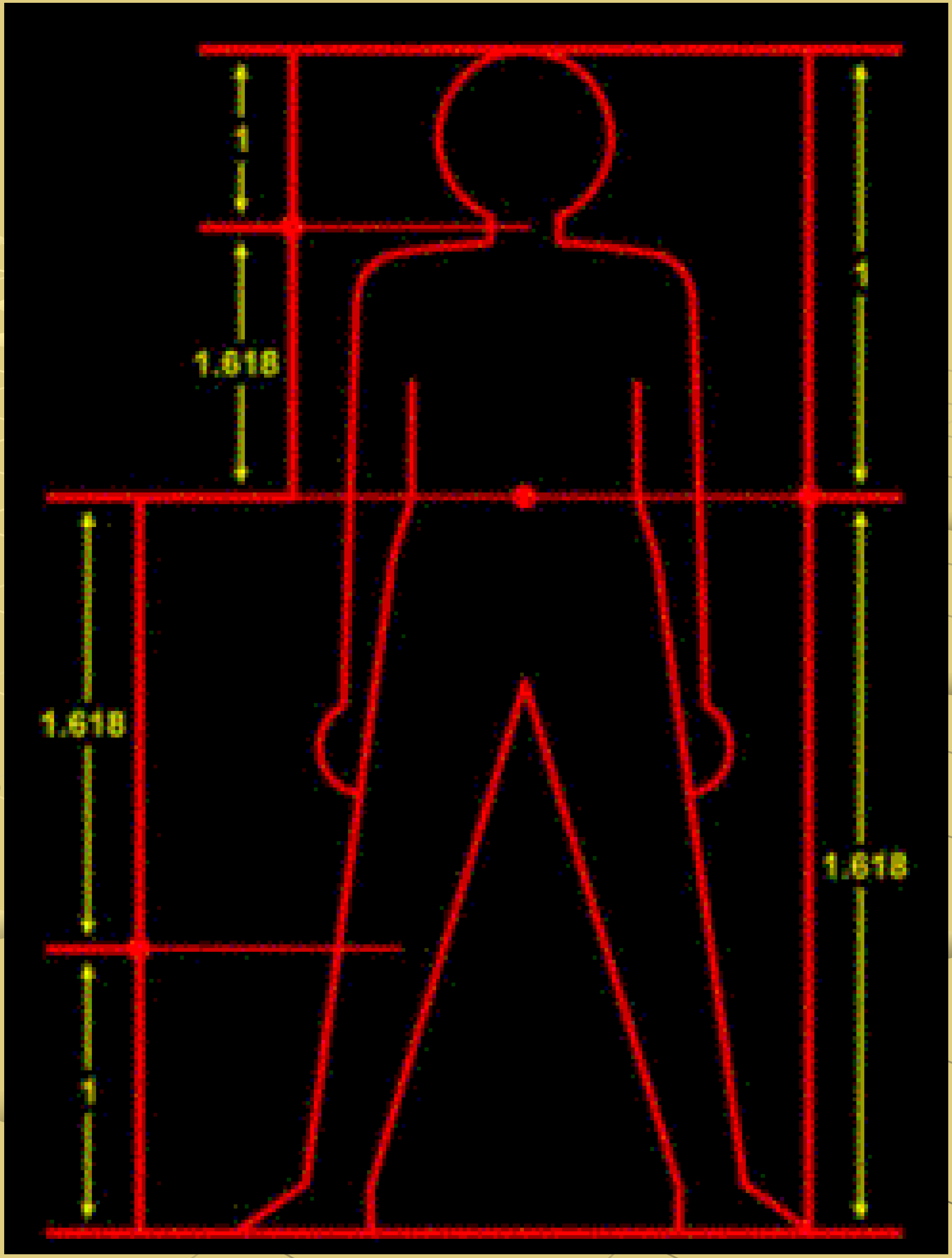
En el ser humano:

El número áureo aparece también en la relación entre la medida del antebrazo y la longitud de la mano.



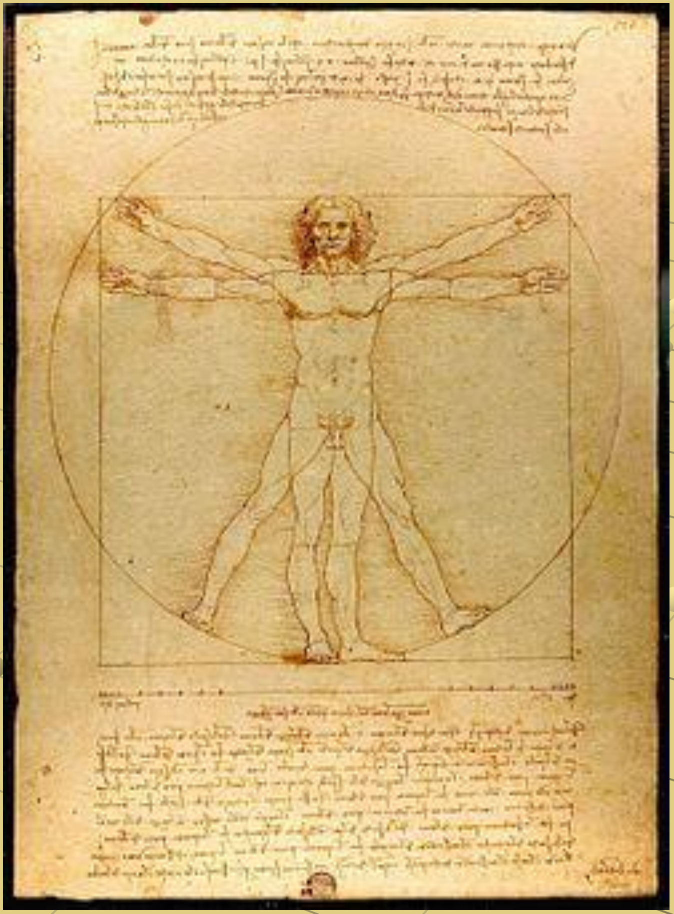
En el ser humano:

- La relación entre la altura de un ser humano y la altura de su ombligo.
- La relación entre la distancia del hombro a los dedos y la distancia del codo a los dedos.
- La relación entre la altura de la cadera y la altura de la rodilla.
- La relación entre el diámetro de la boca y el de la nariz.
- la relación entre la longitud de la cabeza y su anchura.

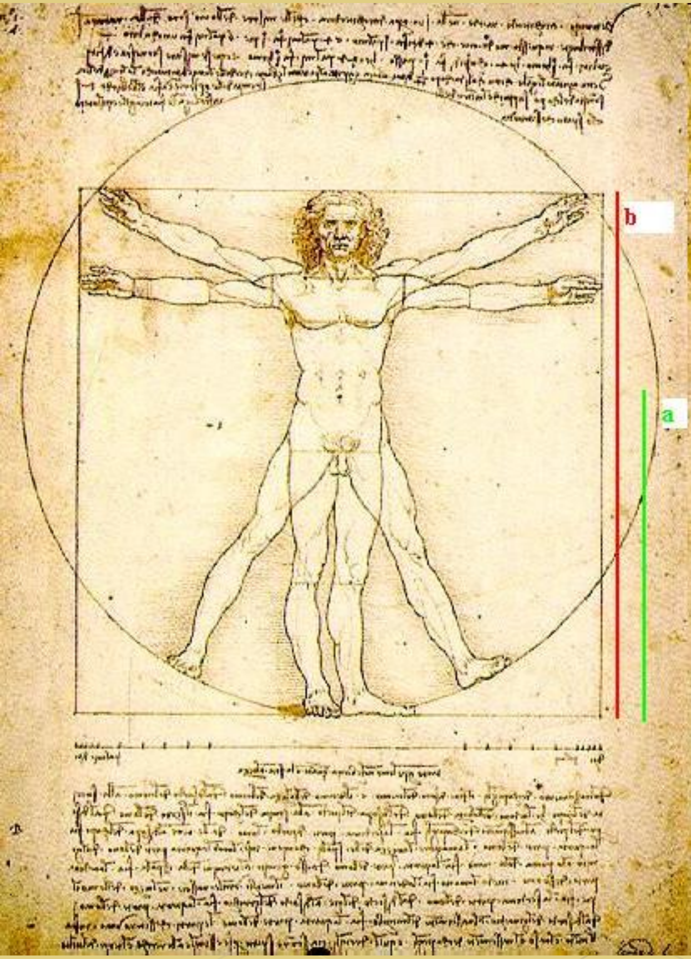

1
1.618
1
1.618
1
1.618

En el arte:

Leonardo Da Vinci realizó este dibujo para ilustrar el libro De Divina Proportione del matemático Pacioli.
En dicho libro se describen cuáles deben ser las proporciones de las construcciones artísticas.
En particular, Pacioli propone un hombre perfecto en el que las relaciones entre las distintas partes de su cuerpo sean las del dibujo adjunto. Resulta que la relación entre la altura del hombre y la altura de su ombligo es el número de oro.



El hombre de Vitruvio

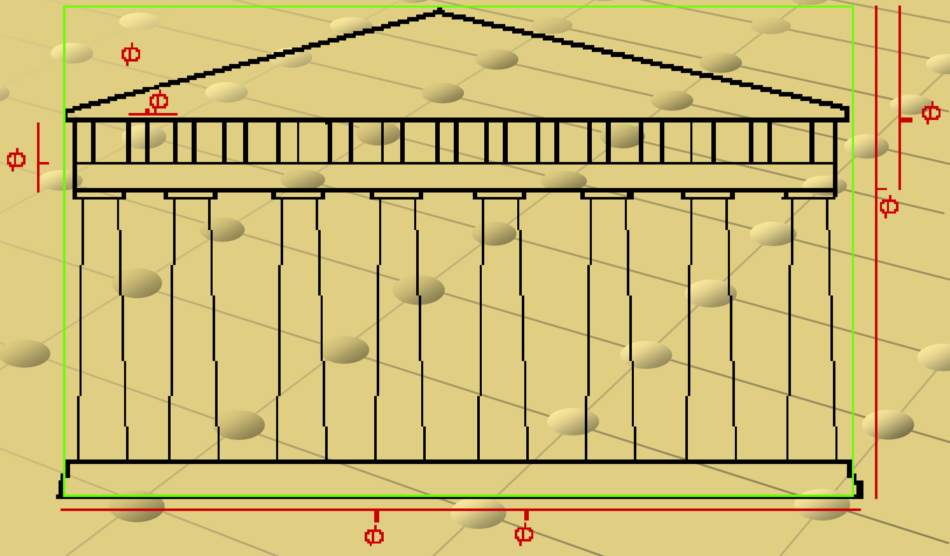


A la figura le añadimos las líneas a y b, que representan, respectivamente, la altura hasta el ombligo (a) y la altura total (b), y vemos que, efectivamente, la proporción es el número de oro:

$$\frac{b}{a} = \varphi$$

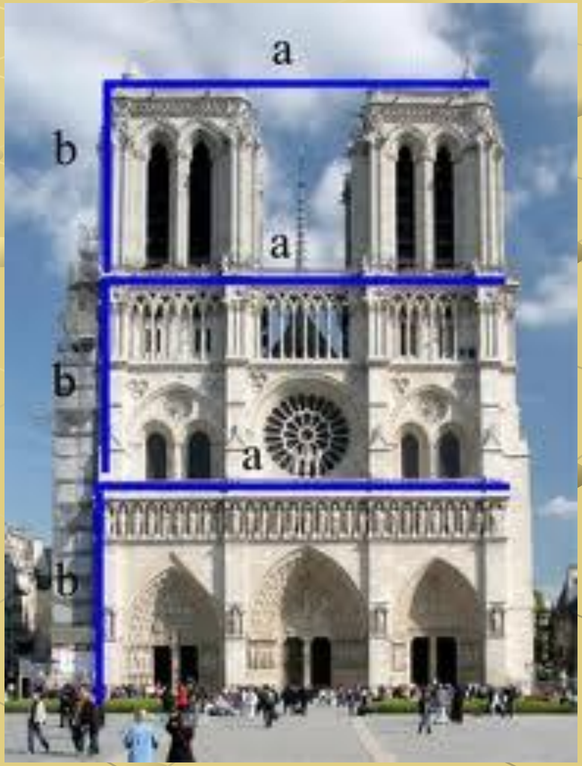
En el arte (arquitectura):

La relación entre las partes, el techo y las columnas del Partenón, en Atenas (s. V a.C.).



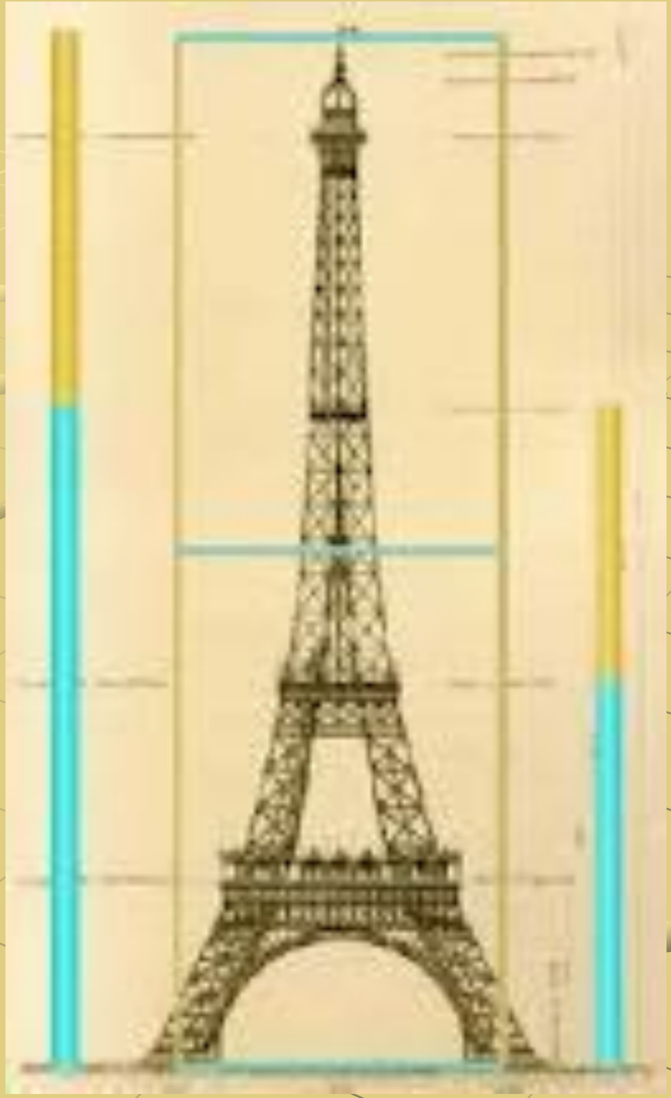
En el arte (arquitectura):

En Notre Dame, de París, los rectángulos que conforman la fachada principal guardan la proporción áurea.



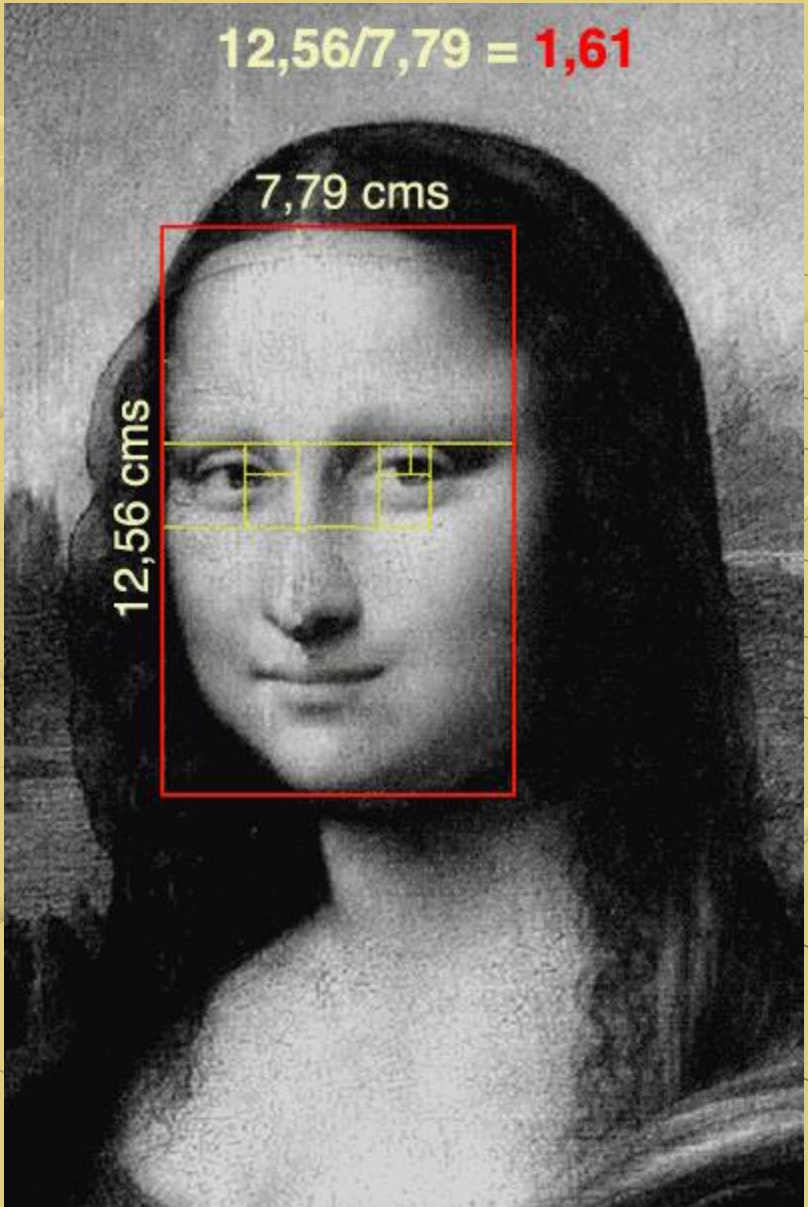
En el arte (arquitectura):

En la torre Eiffel,
en París.



En el arte (pinturas famosas):

El rostro de la mona lisa de Leonardo da Vinci encierra un "rectángulo dorado" perfecto.

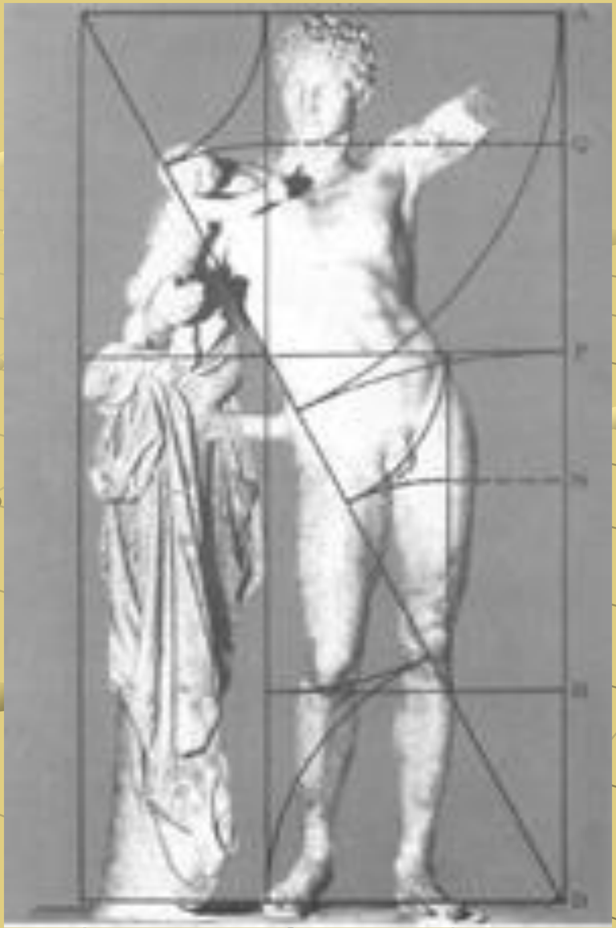


En el arte (pinturas famosas):

En El nacimiento de Venus, de Botticelli.

En la escultura:

En el Hermes de Praxíteles (s. IV a.C.) encontramos relaciones basadas en la proporción áurea.



En el arte (música...):

- Relaciones en la forma de la Gran Pirámide de Gizeh.
- En los violines, la posición de las efes (los orificios que hay en la tapa) se relaciona con el número áureo.
- En las estructuras formales de las sonatas de Mozart, en la Quinta Sinfonía de Beethoven, en obras de Schubert y Debussý (estos compositores probablemente compusieron estas relaciones de manera inconsciente, basándose en equilibrios de masas sonoras).

Espiral de Durero

Alberto Durero (1471 – 1528) fué pintor y gran amante de las matemáticas. En 1525 publicó su obra *Instrucción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas* para enseñar a los artistas pintores y matemáticos de la época diversos métodos para trazar distintas figuras geométricas.

La espiral de Durero y el número de oro: construcción de la espiral

Los rectángulos áureos son aquellos cuyos lados

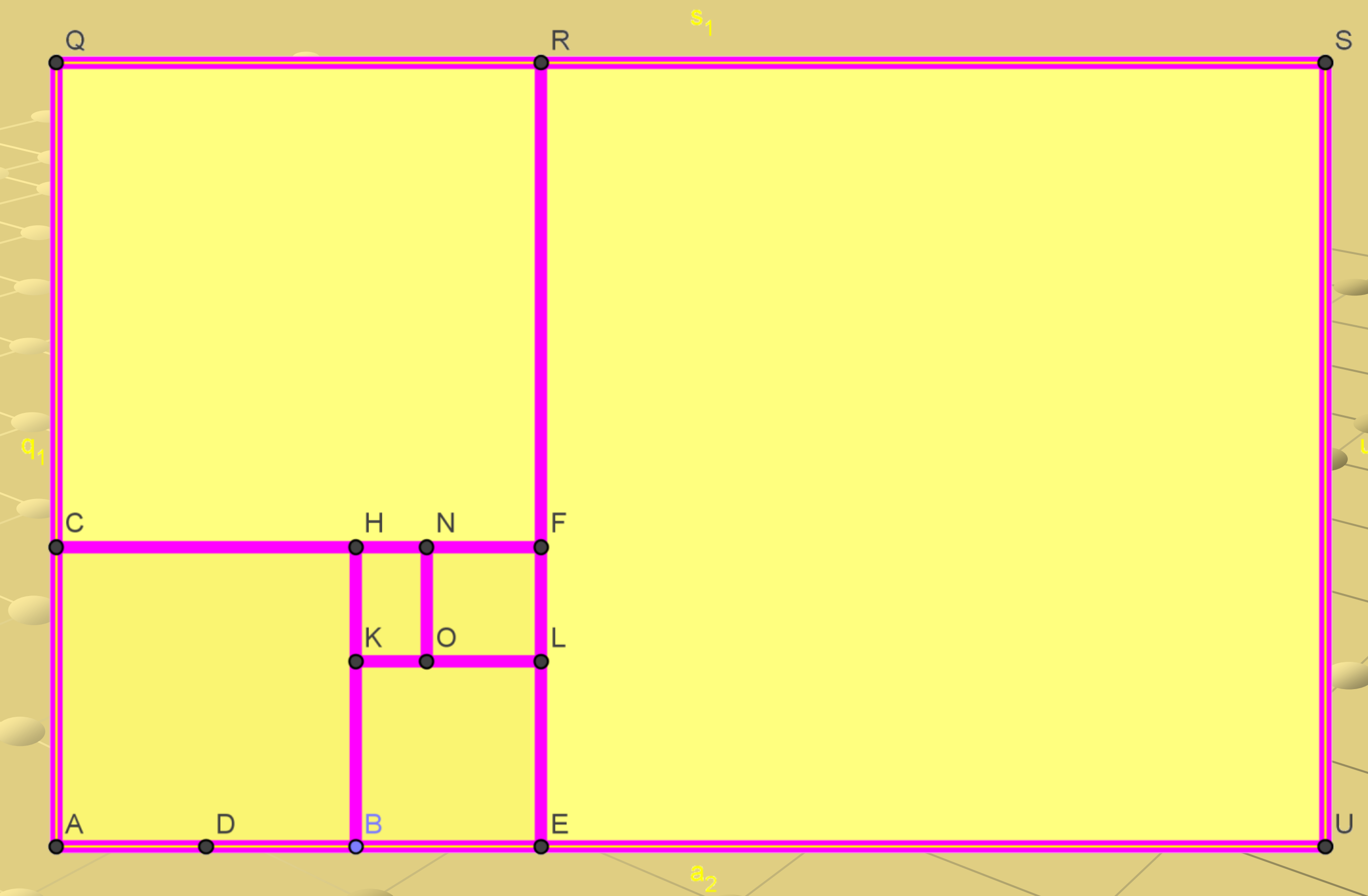
están en proporción áurea, es decir, el cociente

entre su lado mayor y su lado menor es,

Precisamente, el número de oro.

Construimos una sucesión de rectángulos áureos

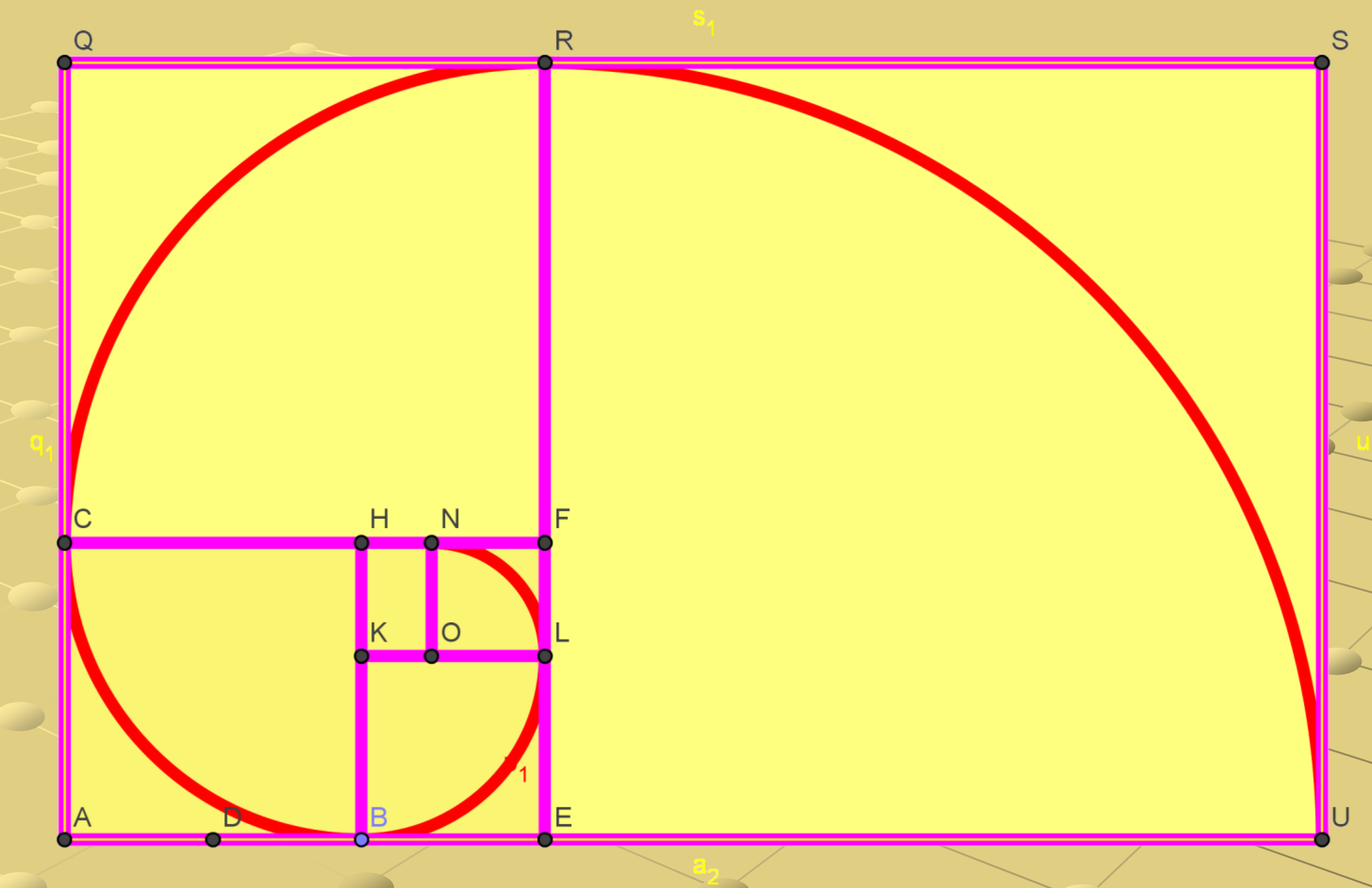
encajados.



Q
R
s1
S
q1
u
C
H
N
F
K
O
L
A
D
B
E
U
a2

construcción de la espiral de Durero

A continuación si unimos mediante un arco de circunferencia dos vértices opuestos de cada uno de los cuadrados obtenidos, utilizando como centro de la misma otro de los vértices del mismo cuadrado, obtenemos una curva muy similar a una espiral logarítmica, es la famosa Espiral de Durero

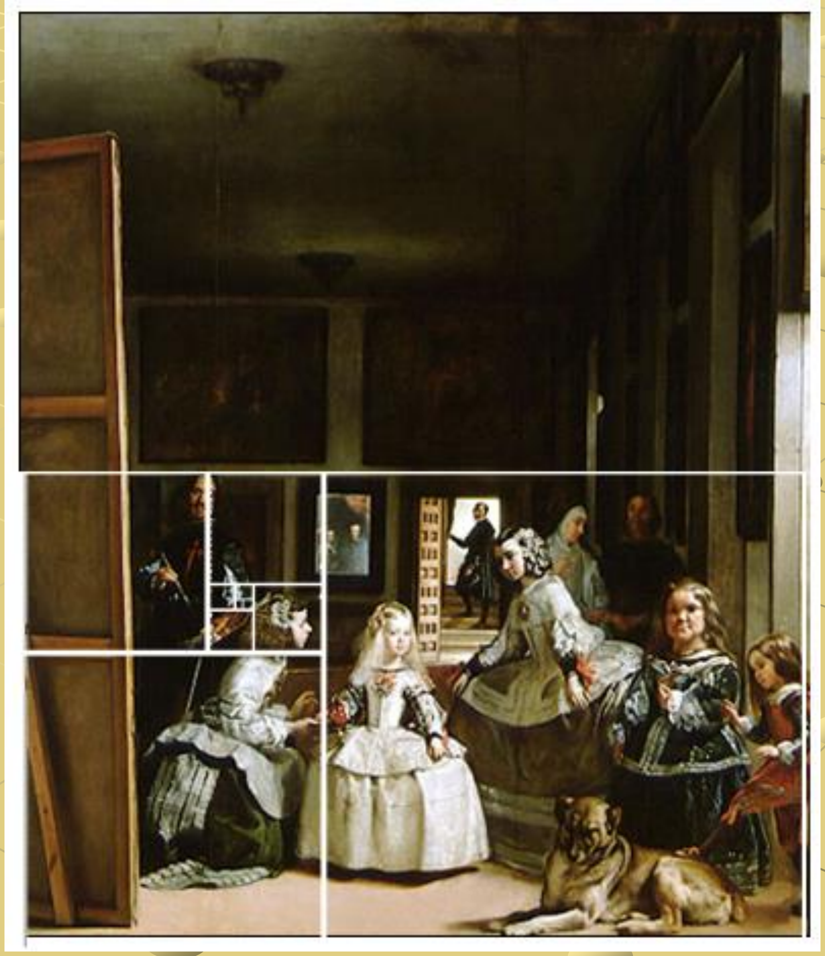


Q
R
S
s1
q1
u
C
H
N
F
K
O
L
A
D
B
E
U
a2

Espiral de Durero en la pintura

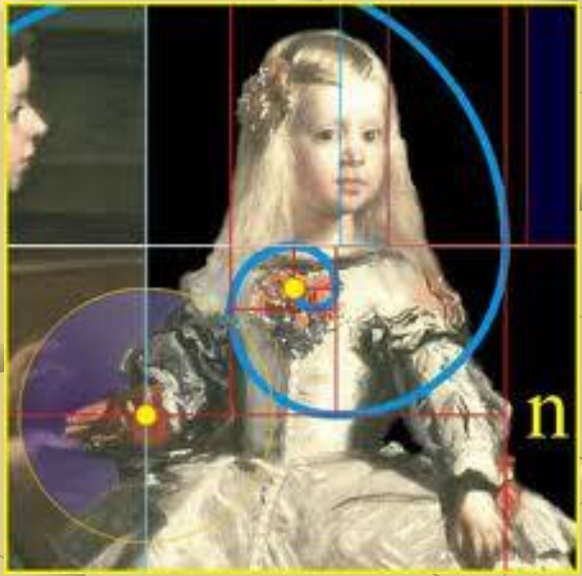
La espiral de Durero
se aplicó en el arte,
en una de las pinturas
mas famosas, *Las Meninas* de Velázquez.

Aquí podemos ver la sucesión de rectángulos áureos:

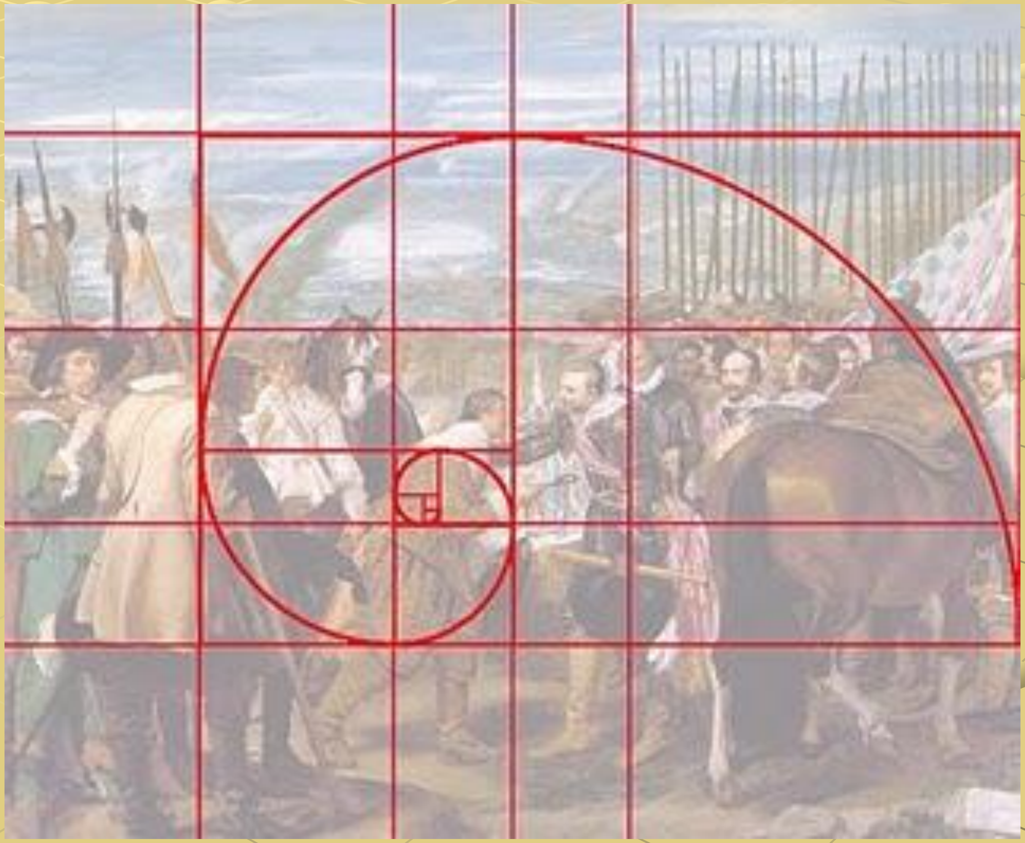


Las Meninas y la espiral de Durero

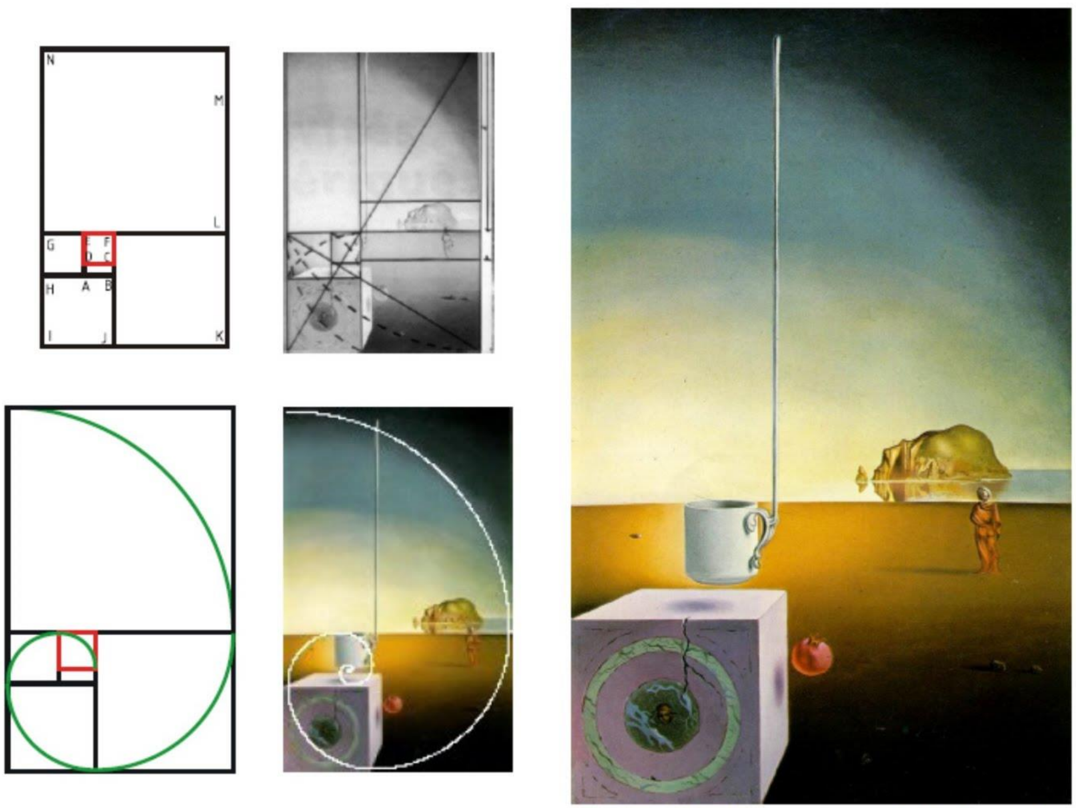
Esta obra fue pintada a proporción de una espiral de Durero que empieza en el pecho de la Infanta Margarita donde la espiral de reparte por toda la pintura.



En Las Lanzas de Velázquez podemos ver otra espiral relacionada con el número de oro.



Y en este cuadro de Dalí:



"Semitaza gigante volante, con anexo inexplicable de cinco metros de longitud"; 1944-1945
Óleo sobre lienzo; 50 x 31 cm.
Basilea. Colección privada

O en la imagen de este sello sueco:

La sucesión de Fibonacci

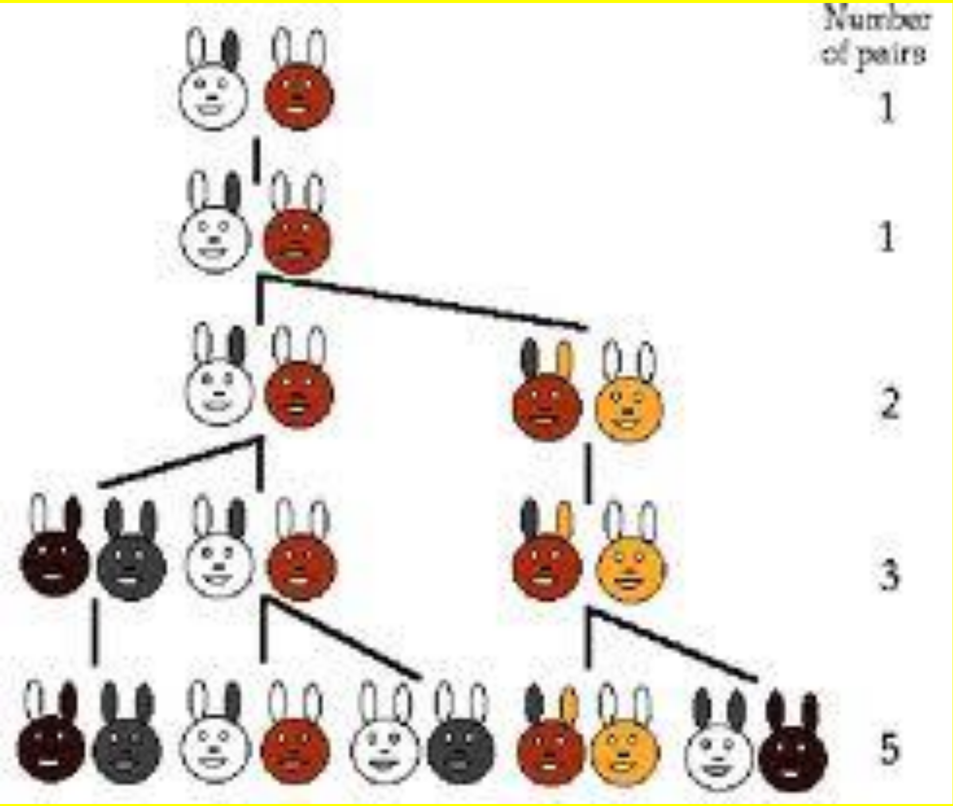
En matemáticas, la sucesión de Fibonacci es la siguiente sucesión infinita de números naturales:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...

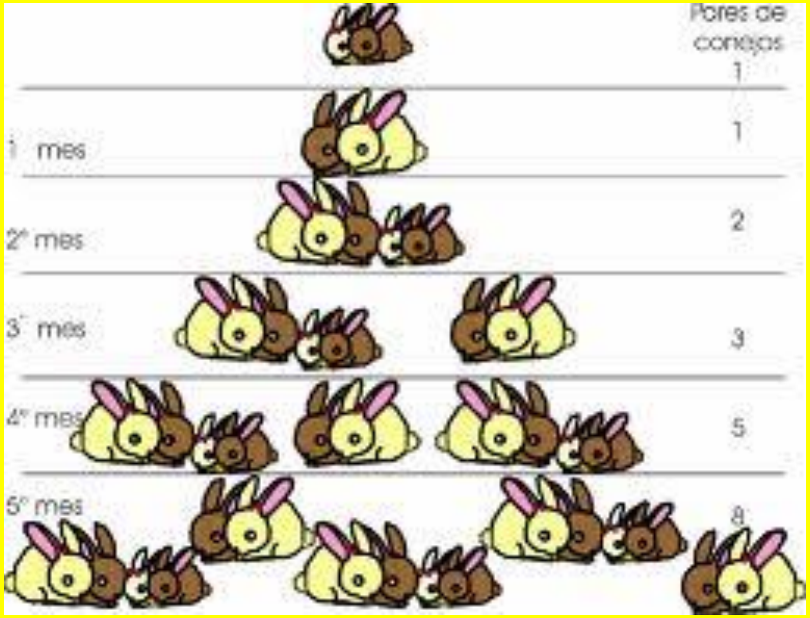
La sucesión inicia con 0 y 1, y a partir de ahí cada elemento es la suma de los dos anteriores.

El problema de los conejos:

La sucesión fue descrita por Fibonacci como la solución a un problema de la cría de conejos:



Leonardo de Pisa (Fibonacci) usa la sucesión que lleva su nombre para calcular el número de pares de conejos n meses después de que una primera pareja comienza a reproducirse (suponiendo que los conejos están aislados por muros, se empiezan a reproducir cuando tienen dos meses de edad, tardan un mes desde la fecundación hasta la aparición y cada camada es de dos conejos).



0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144…

Resulta que el cociente entre cada dos números consecutivos de esta sucesión, es el número de oro.

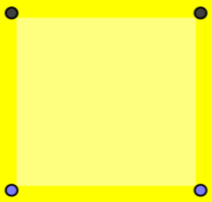
$$\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \ldots$$

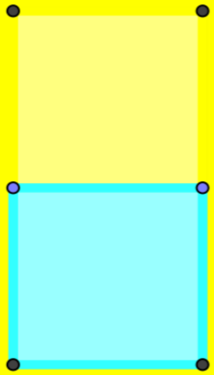
$$\frac{3}{2} = 1'5; \frac{5}{3} = 1'66\ldots; \frac{8}{5} = 1'6; \frac{13}{8} = 1'625; \frac{21}{13} = 1'615\ldots;$$

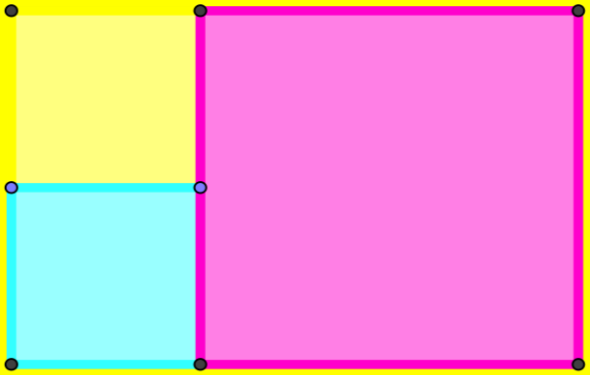
$$\frac{34}{21} = 1'619\ldots; \frac{55}{34} = 1'617\ldots; \frac{89}{55} = 1'618\ldots$$

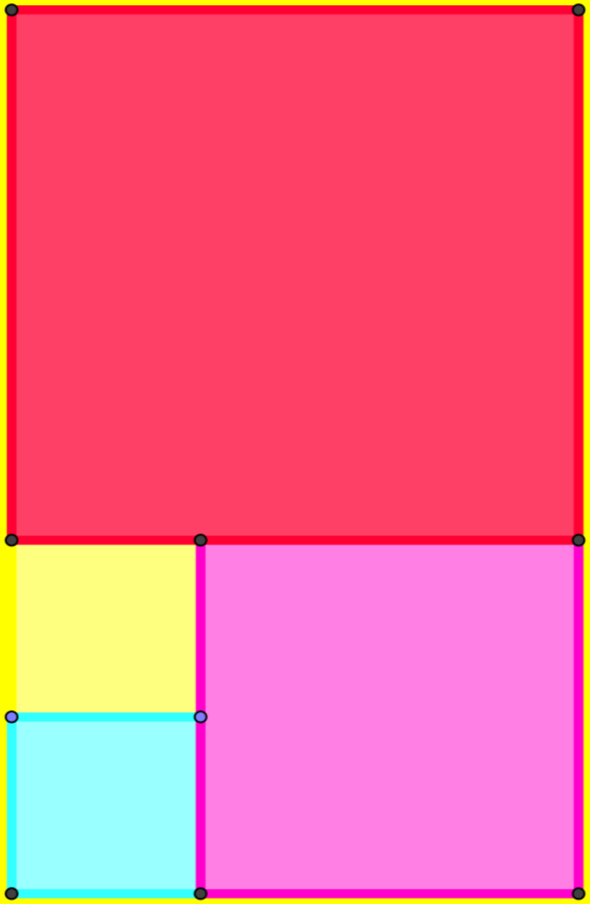
Espiral de Fibonacci

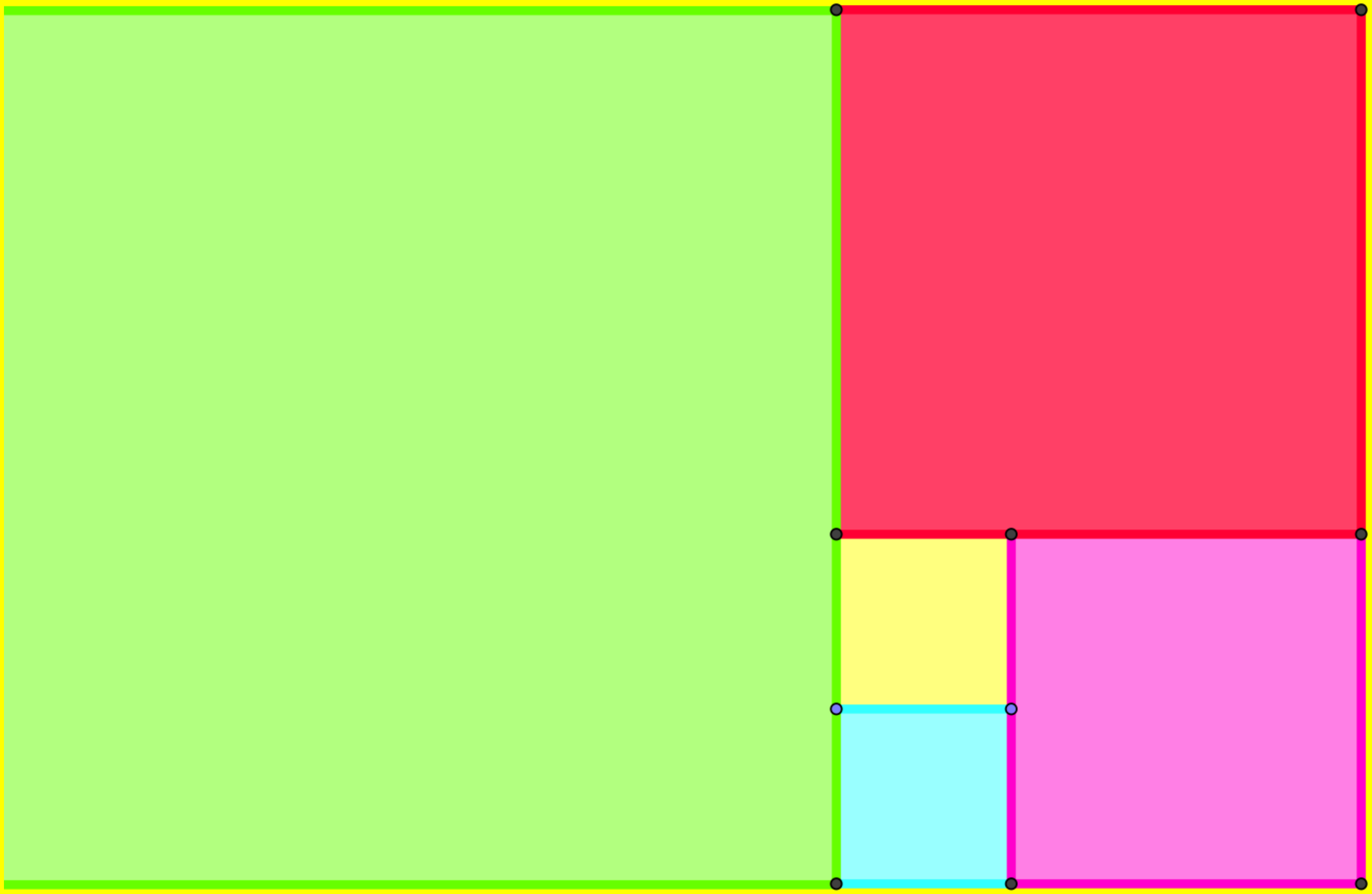
Podemos construir una serie de rectángulos utilizando los números de la sucesión de Fibonacci.
Empezamos con un cuadrado de lado 1, los dos primeros términos de la sucesión.
Construimos otro igual sobre él. Tenemos ya un primer rectángulo Fibonacci de dimensiones 2 X1.
Sobre el lado de dos unidades construimos un cuadrado y tenemos un nuevo rectángulo de 3x2.
Sobre el lado mayor construimos otro cuadrado, tenemos ahora un rectángulo 5X3, luego uno 5X8, 8X13, 13X21...
Cuanto más avanzamos en este proceso más nos aproximamos al rectángulo aureo.
Si unimos los vértices de estos rectángulos se va formando la espiral de Fibonacci.

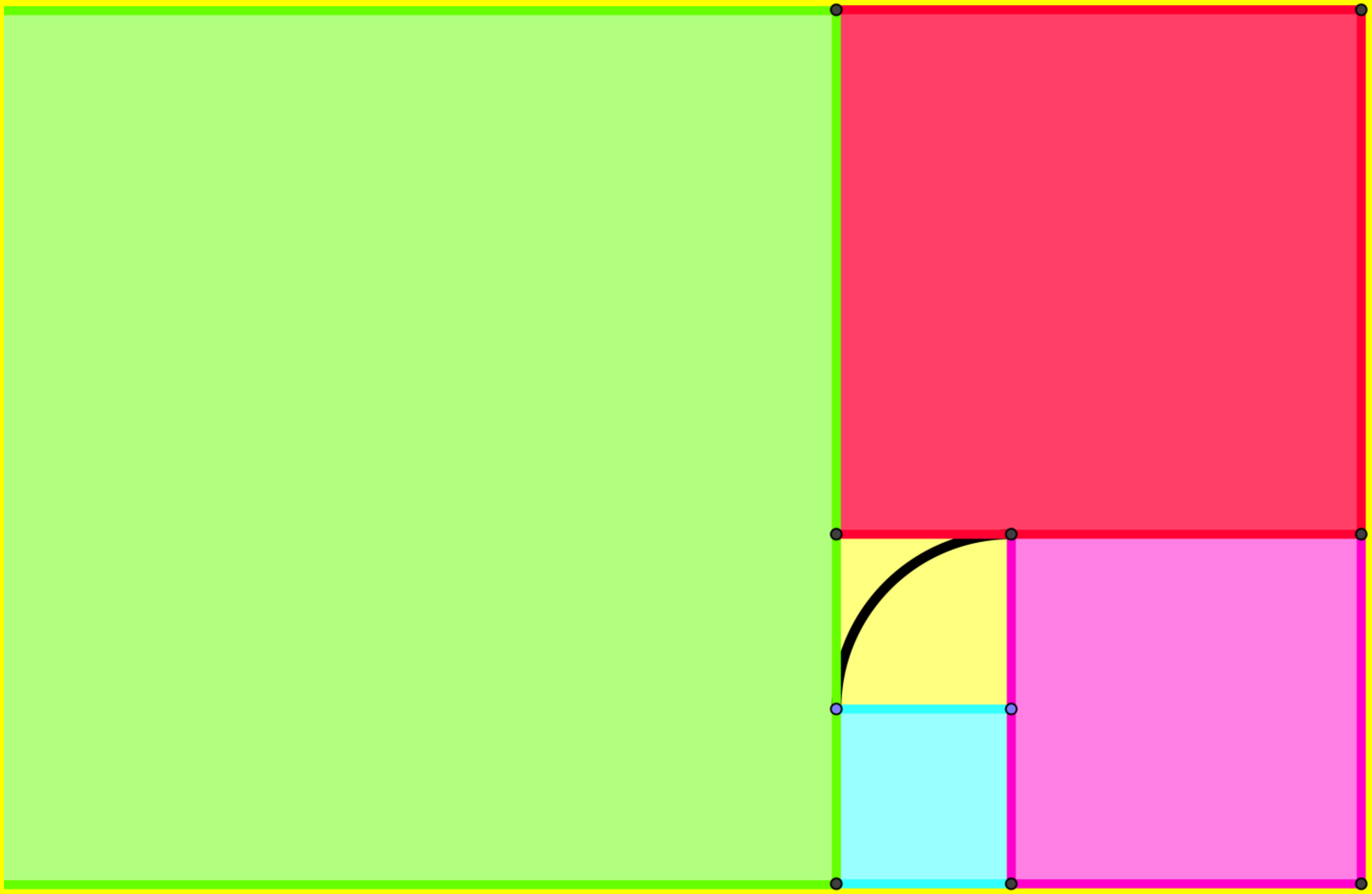


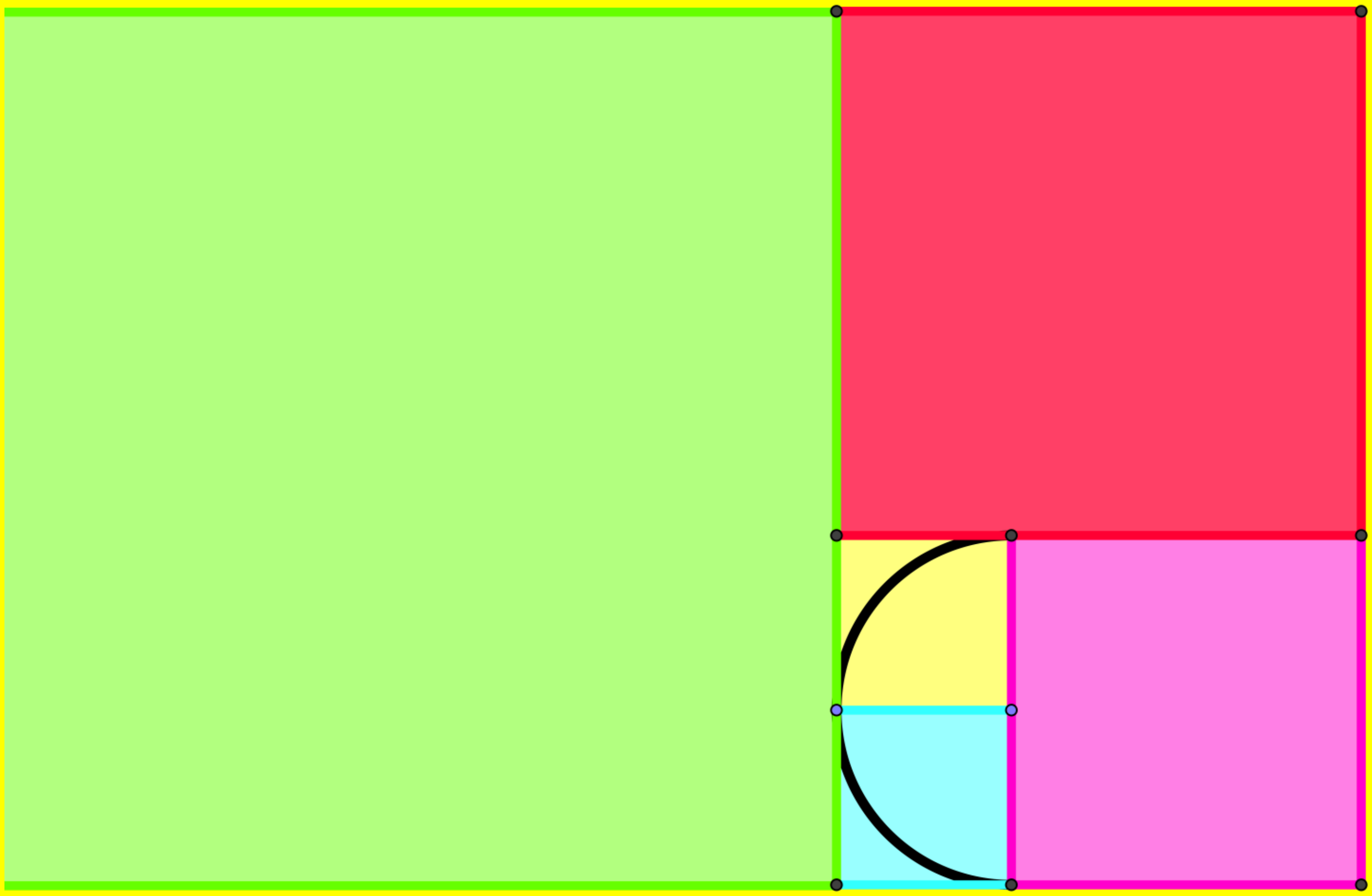


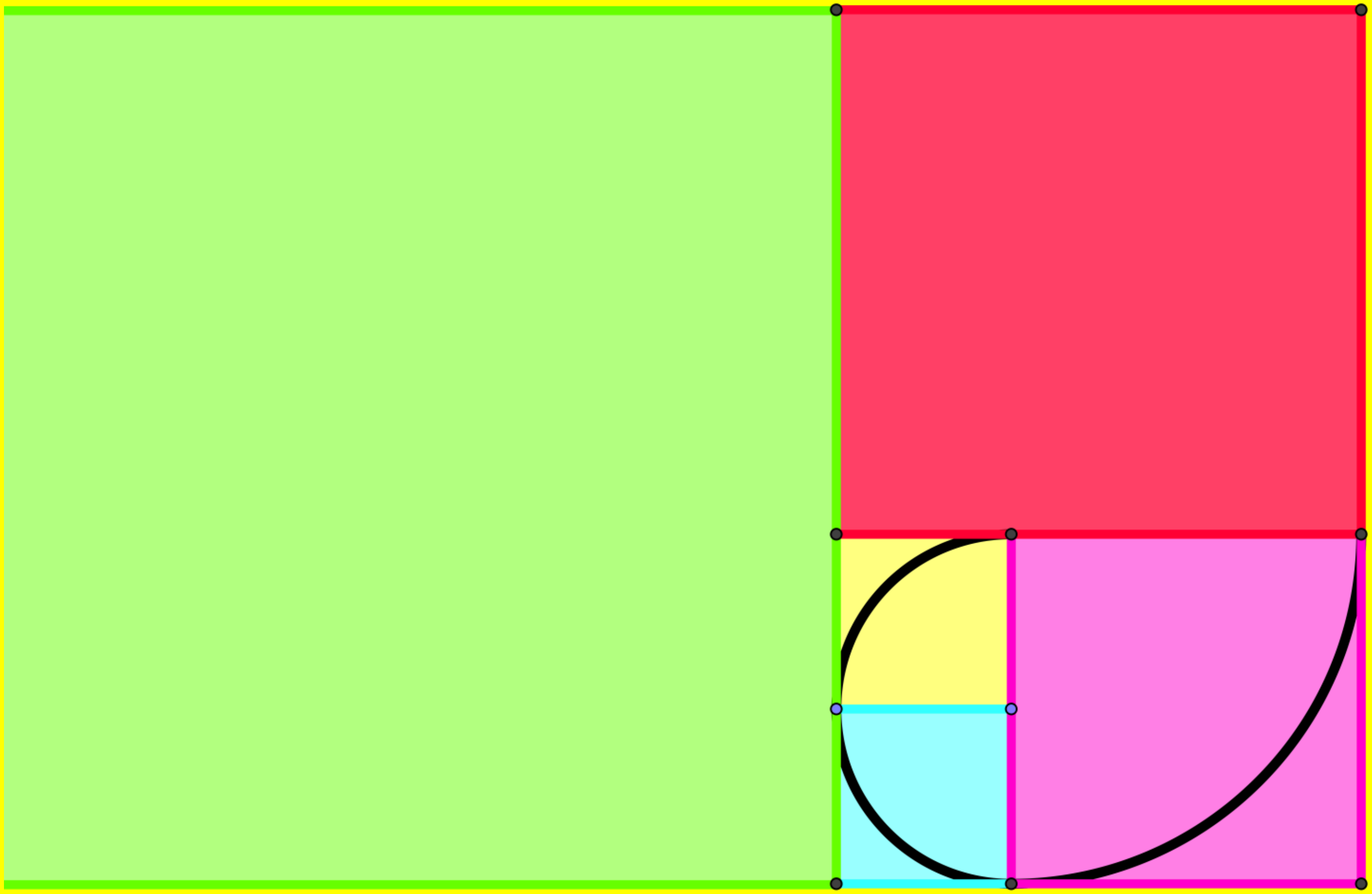


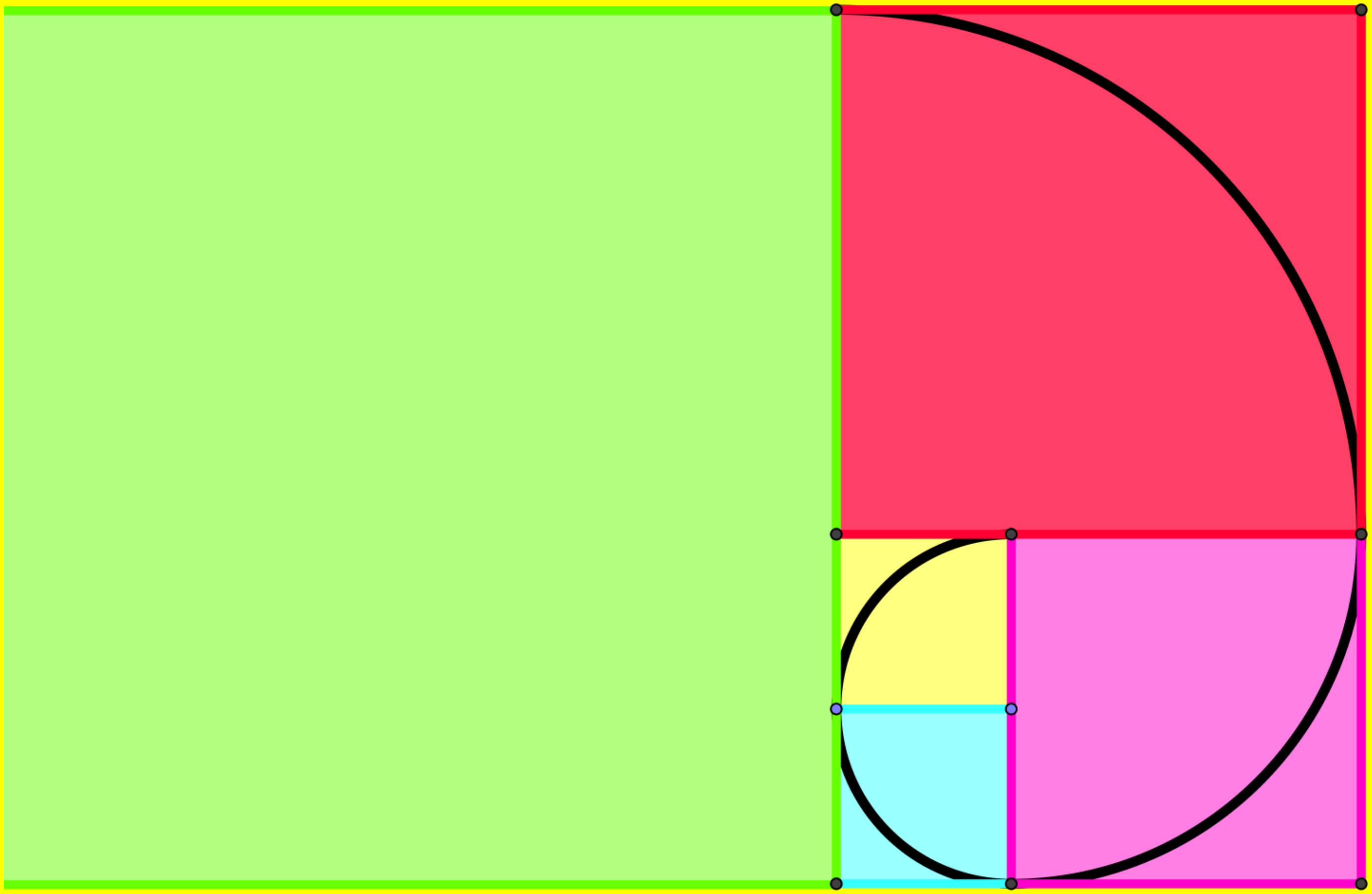


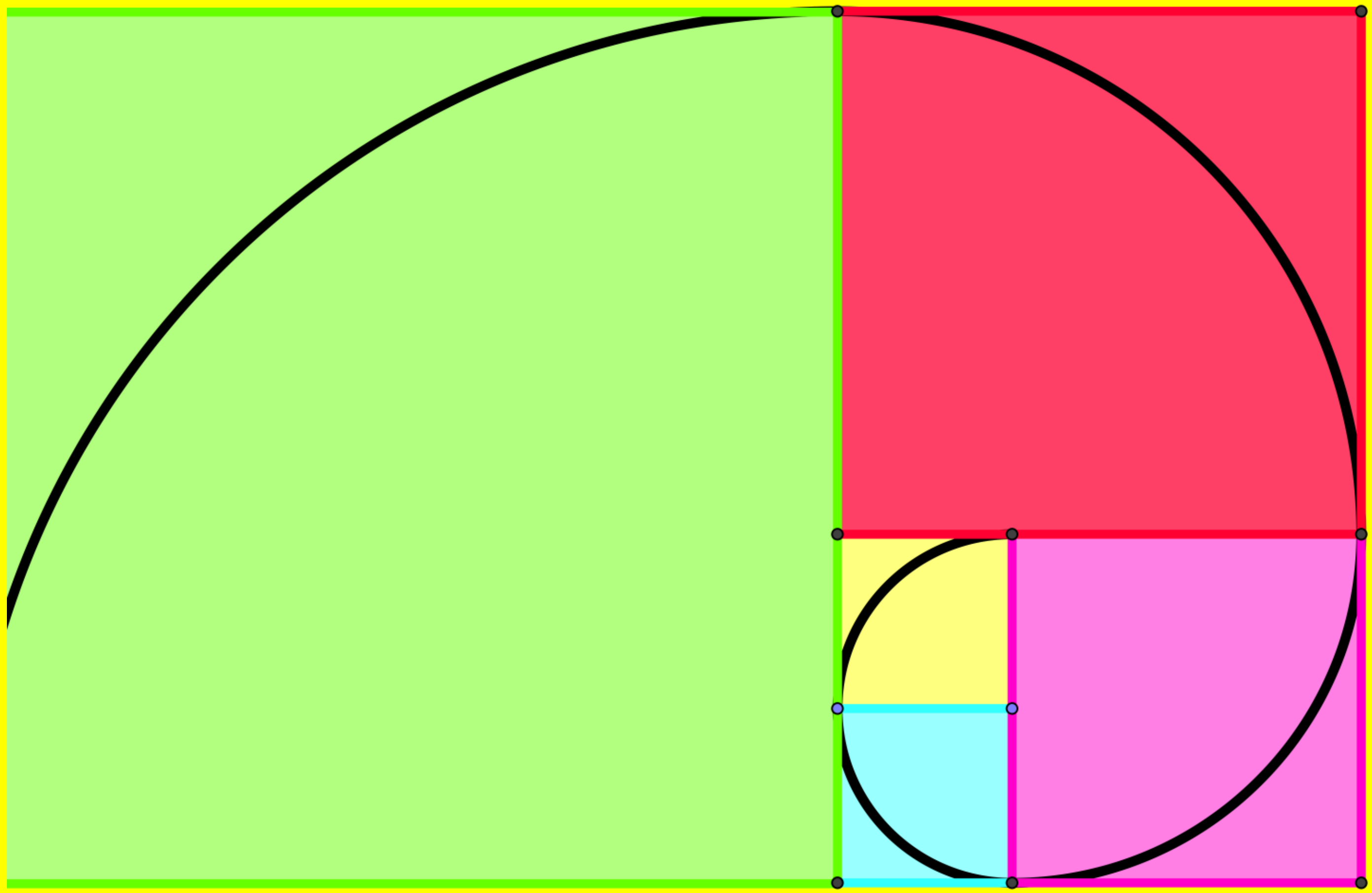








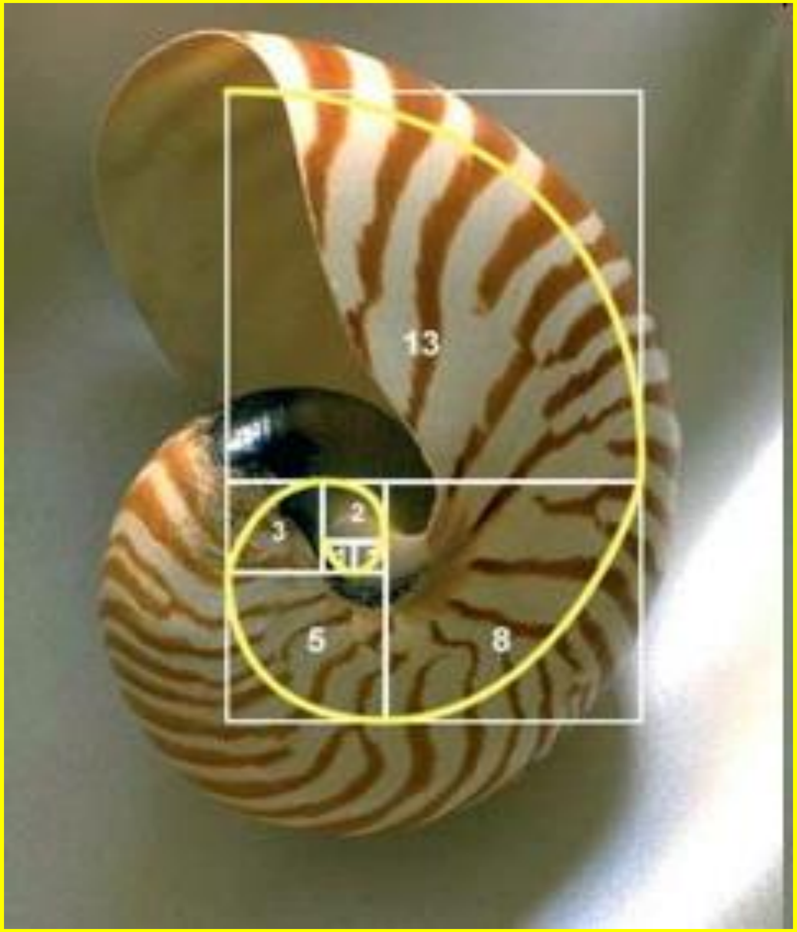


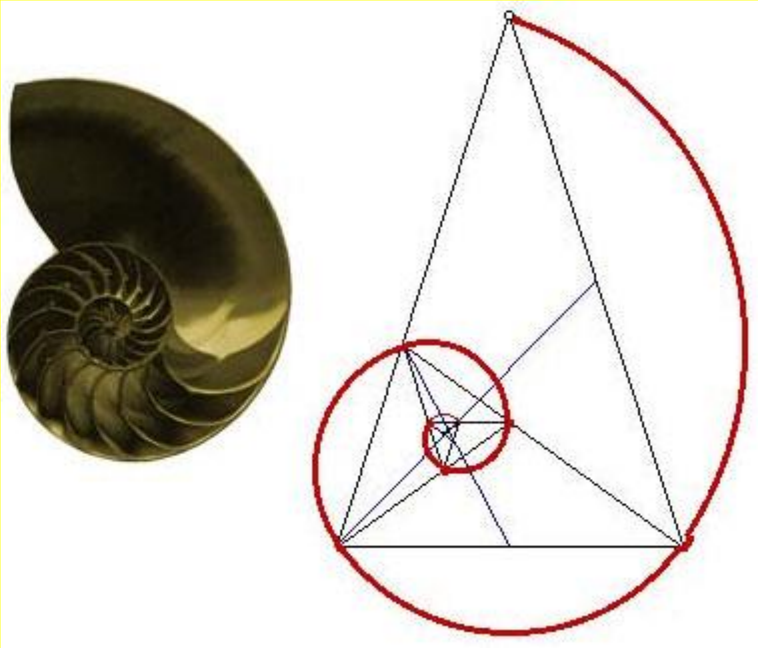


Una espiral que, de forma aproximada, está presente en el crecimiento de las conchas de los moluscos, en los cuernos de los rumiantes... Es decir, la espiral del crecimiento y la forma del reino animal.

En la Naturaleza:

La relación que existe en la distancia entre las espiras del interior de los caracoles como el Nautilus.
Se trata de una espiral logarítmica, que se puede <u>aproximar</u> por la de Fibonacci.

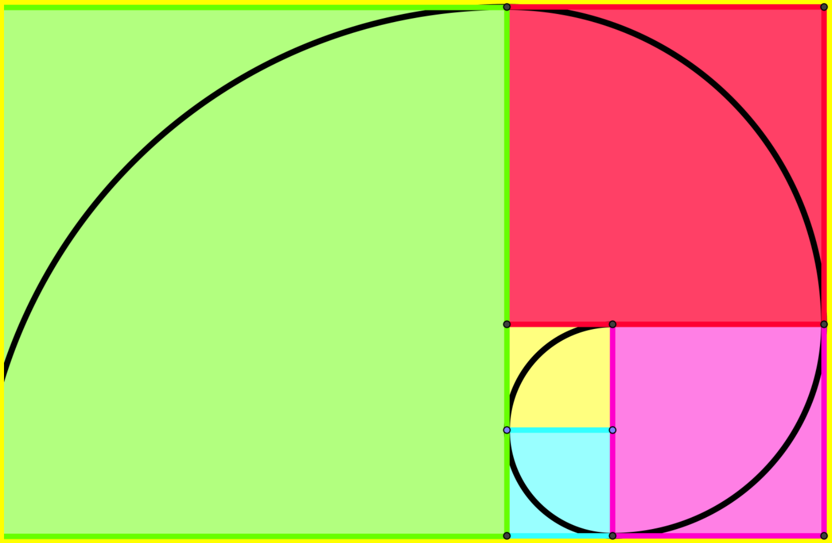




Éste es un corte de la concha de un nautilus, donde se aprecian las cámaras formando, aproximadamente, una espiral de Fibonacci.

Por tanto, vemos que:

Se pueden aproximar espirales logarítmicas utilizando la sucesión de Fibonacci o la proporción áurea.

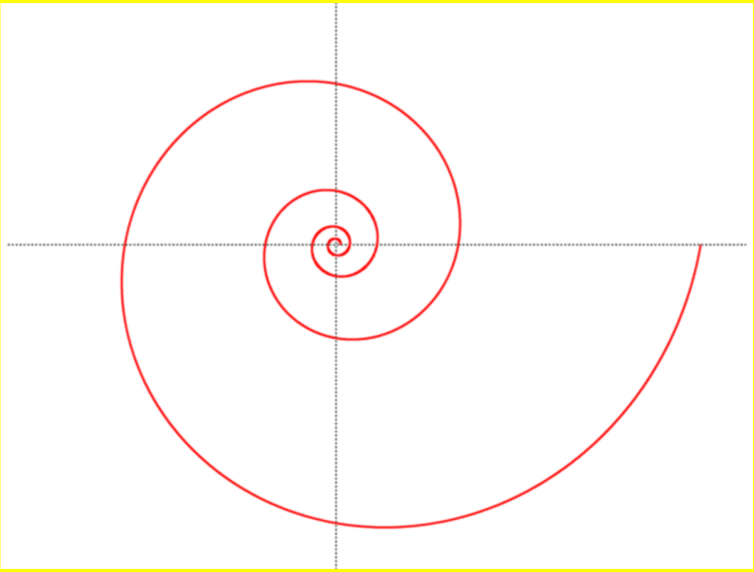


La espiral logarítmica

Espiral logarítmica

Una espiral logarítmica o espiral de crecimiento es una clase de curva espiral que aparece frecuentemente en la naturaleza. Su nombre proviene de la expresión de una de sus ecuaciones:

$$\theta = \log_b(r/a)$$



Espirales logarítmicas en la naturaleza

Una borrasca sobre Islandia. El patrón que sigue se aproxima a la forma de una espiral logarítmica.

Espirales logarítmicas en la naturaleza

La espiral logarítmica vinculada a los rectángulos áureos gobierna el crecimiento armónico de muchas formas vegetales (flores y frutos) y animales (conchas de moluscos), aquellas en las que la forma se mantiene invariante. El ejemplo más visualmente representativo es la concha del *nautilus*.

Espirales logarítmicas en la naturaleza

Imagen de la galaxia espiral M81 (o galaxia de Bode), en la que se puede observar polvo interestelar siguiendo aproximadamente una espiral logarítmica.

Los brazos de las galaxias espirales son aproximadamente espirales logarítmicas. Nuestra propia galaxia, la Vía Láctea, se cree que tiene cuatro brazos espirales mayores, cada uno de los cuales es una espiral logarítmica de unos 12 grados.

Espirales logarítmicas en la naturaleza

Los brazos de los ciclones tropicales, como los huracanes, también forman espirales logarítmicas.

La tormenta tropical Richard

Tormenta tropical Franck

Espirales logarítmicas en la naturaleza

En biología son frecuentes las estructuras aproximadamente iguales a la espiral logarítmica. Por ejemplo, las telas de araña y las conchas de molusco.

Espirales logarítmicas en la naturaleza

El halcón se aproxima a su presa según una espiral logarítmica: su mejor visión está en ángulo con su dirección de vuelo; este ángulo es el mismo que el grado de la espiral.

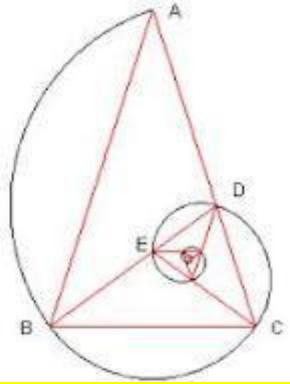
Espirales logarítmicas en la naturaleza

Los insectos se aproximan a la luz según una espiral logarítmica porque acostumbran a volar con un ángulo constante a la fuente luminosa. Normalmente el Sol es la única fuente de luz y volar de esta forma consiste prácticamente en seguir una línea recta.

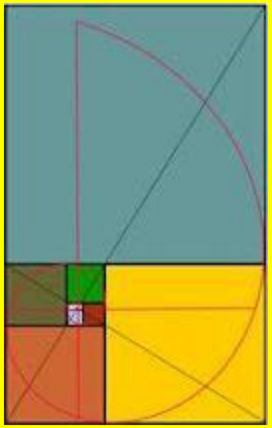
Espirales logarítmicas en la naturaleza

La dinámica de un agujero negro también se aproxima a la espiral logarítmica.

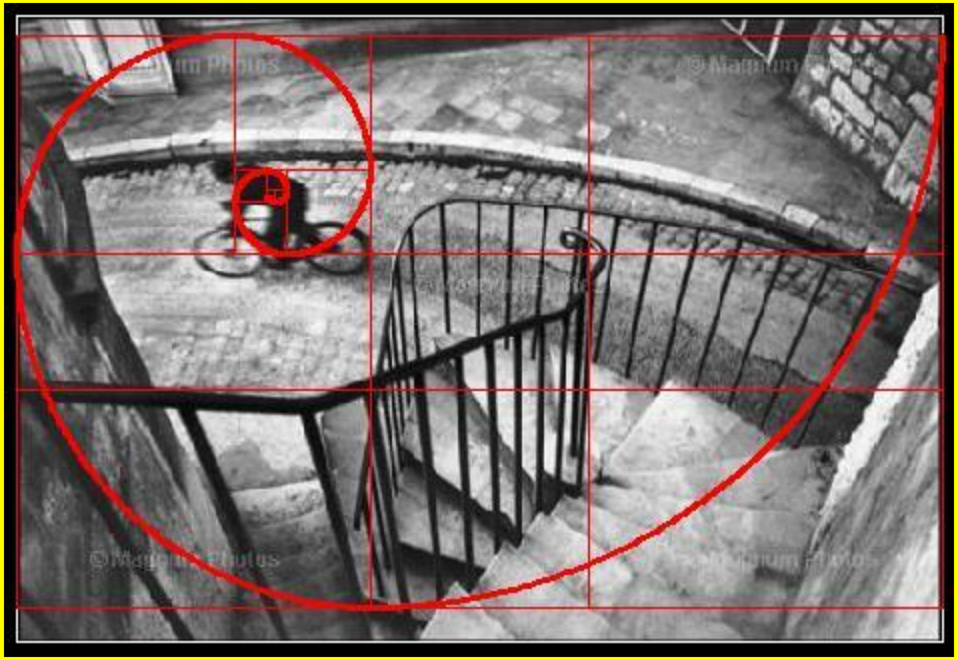
Espirales en el arte



Esta curva ha cautivado, por su belleza y propiedades, la atención de matemáticos, artistas y naturalistas.



Inspirando, también, bellas fotografías matemáticas…



En resumen:

El número de oro aparece en ciertas figuras geométricas, en la Naturaleza, en el Arte...

La espiral de Durero, construida sobre rectángulos áureos, ha sido utilizada en el arte (pintura, arquitectura, escultura...).

Asociada al número de oro está la sucesión de Fibonacci: el cociente de dos términos consecutivos es φ. Con ella construimos la espiral de Fibonacci, ayudándonos de una sucesión de cuadrado de lado los términos de la sucesión. Esta espiral se utiliza para aproximar la espiral logarítmica.

La espiral logarítmica describe multitud de fenómenos naturales.

Y, para despedirnos, un poema

A LA DIVINA PROPORCION

A tí, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.
A tí, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el universo armónico origina.
A tí, mar de los sueños angulares,
flor de las cinco flores regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.
Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A tí, divina proporción de oro.

Rafael Alberti

bibliografía

- Wikipedia
- Imágenes google
- Vídeos google
- Página web Estalmat, Cantabria
- Aplicaciones de Geogebra