

---

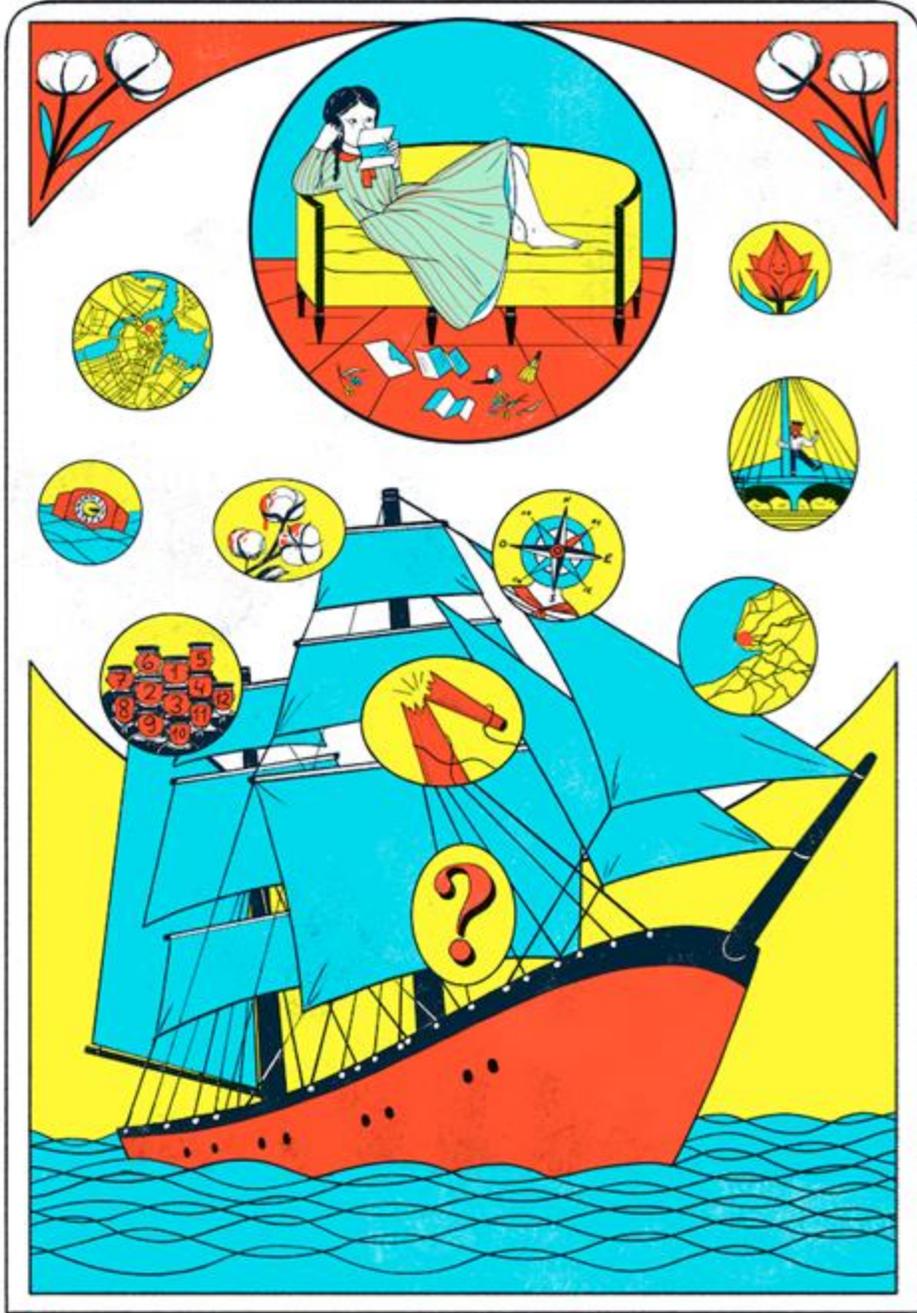
# HABILIDADES PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

JOSEÁNGEL MURCIA CARRIÓN  
@TOCAMATES  
JOSEANGELMURCIA@GMAIL.COM



*A modo de introducción*

*Un poco de historia...*



---

*La maestra ha colocado a sus alumnos  
en 6 grupos de 4 alumnos cada uno.  
¿Cuántos años tiene la maestra?*

## Preámbulo

*Luis está ante un Macintosh intentando escribir una parte de las páginas que siguen.  
Helena (6;2) entra en escena.*

H — ¿Puedo jugar con el Mac in'?

L — No, que estoy trabajando.

H — ¡Vengaaa!

L — Déjame, que estoy escribiendo un problema.

H — ¿Sí? ¿Qué problema?

L — Mira: “Una niña se compra unas chucherías en un kiosco. Para pagarlas da 10 pesetas y le devuelven 3 pesetas. ¿Cuántas pesetas se ha gastado?”

H — (protestando) ¡Eso no es un problema!

L — (en tono didáctico) Sí, mira, el problema es cuánto se ha gastado.

H — ¡Uy! Siete pesetas.

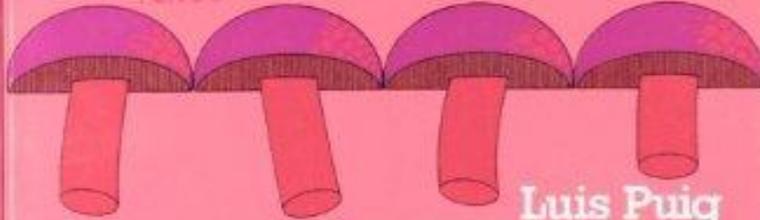
L — (algo harto por la interrupción) Pues eso es lo que pregunta el problema.

H — (insistiendo) Pero, ¿qué problema tiene la niña, si tiene bastante dinero?

# PROBLEMAS ARITMETICOS ESCOLARES

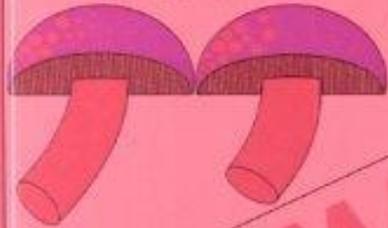
8

TENGO



Luis Puig  
Fernando Cerdán

ME COMO



¿CUANTAS  
ME QUEDAN?

**MATEMATICAS!**  
cultura y aprendizaje

EDITORIAL  
SINTESIS

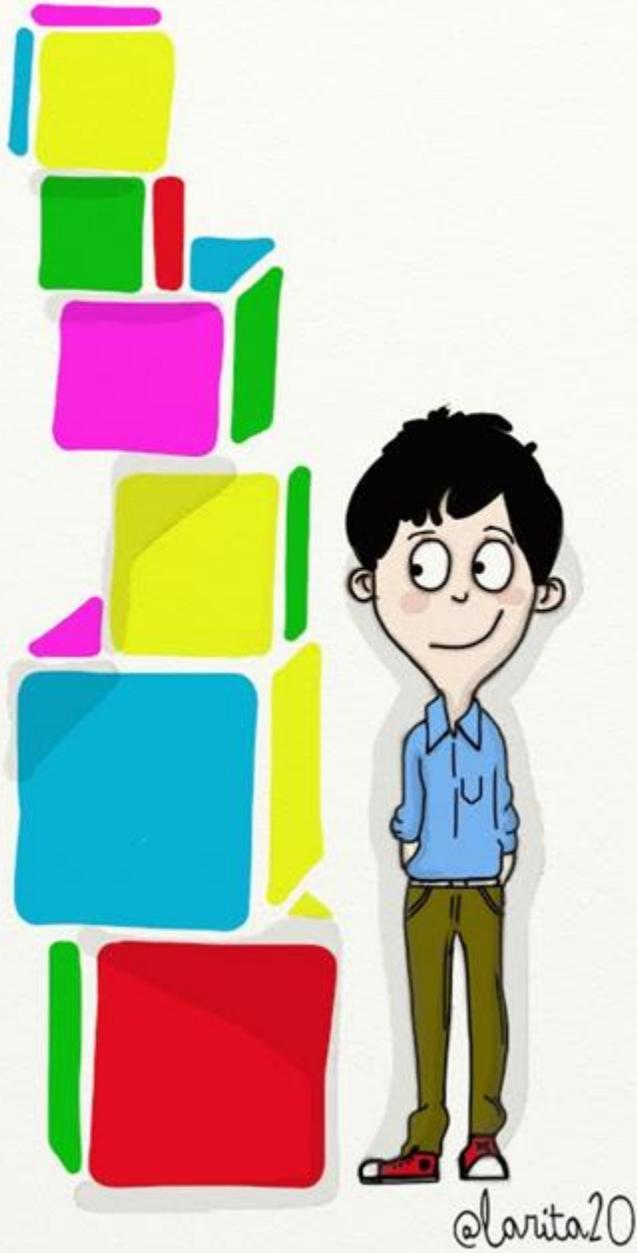
---

*Vas al mercado a comprar sandía.*

*Tienes 87€ y 75 cent.*

*Las encuentras a 0,15€ el kg. ¿Cuántos kilos de sandía compras?*







# Contenidos:

- ¿Por qué resolvemos problemas en matemáticas? ¿Cuándo debemos hacerlo?
- Métodos basados en palabras clave.
- Modelización y metacognición (De estrategias de cálculo/de situaciones-problema)
- Clasificación de los problemas aritméticos verbales.
- Método de fases y barras de Singapur.
- Más allá de la resolución de problemas:
  - Problemas abiertos.
  - Problemas con múltiples soluciones.
  - Problemas geométricos y visuales.
  - Otros problemas.
- ¿Se puede utilizar calculadora para resolver problemas? Otras preguntas.

# Contenidos:

- ¿Por qué resolvemos problemas en matemáticas? ¿Cuándo debemos hacerlo?
- Métodos basados en palabras clave.
- Modelización y metacognición (De estrategias de cálculo/de situaciones-problema)
- Clasificación de los problemas aritméticos verbales.
- Método de fases y barras de Singapur.
- Más allá de la resolución de problemas:
  - Problemas abiertos.
  - Problemas con múltiples soluciones.
  - Problemas geométricos y visuales.
  - Otros problemas.
- Se puede utilizar calculadora para resolver problemas y otras preguntas.

2. Resolver **situaciones problematizadas**, aplicando diferentes técnicas, estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder, obtener soluciones y asegurar su validez desde un punto de vista formal y en relación con el contexto planteado.

La **resolución de problemas** constituye una parte fundamental del aprendizaje de las matemáticas: como objetivo en sí mismo y como eje metodológico para la **construcción** del conocimiento matemático. Como objetivo en sí mismo, entran en juego diferentes estrategias para obtener las posibles soluciones: analogía, ensayo y error, resolución inversa, tanteo, descomposición en problemas más sencillos... Conocer una variedad de estrategias permite abordar con seguridad los retos y facilita el establecimiento de **conexiones**. Las estrategias **no deben centrarse únicamente en la resolución aritmética**, sino que también se facilitarán situaciones que puedan ser resueltas a través de la **manipulación de materiales**, el diseño de **representaciones gráficas** o la **argumentación verbal**. La elección de la estrategia y su periódica revisión durante la resolución del problema implica tomar decisiones, anticipar la respuesta, seguir las pautas establecidas, asumir riesgos y transformar el error en una oportunidad de aprendizaje. Como eje metodológico, proporciona **nuevas conexiones** entre los conocimientos del alumnado, construyendo así **nuevos significados** y conocimientos matemáticos.

Asegurar la **validez de las soluciones** supone **razonar** acerca del proceso seguido y evaluarlas en cuanto a su corrección matemática. Sin embargo, también debe fomentarse la **reflexión crítica** sobre la adecuación de las soluciones al contexto planteado y las implicaciones que tendrían desde **diversos puntos de vista** (consumo responsable, salud, medioambiente, etc.).

[Fuente: BOE RD 157/2022](#)

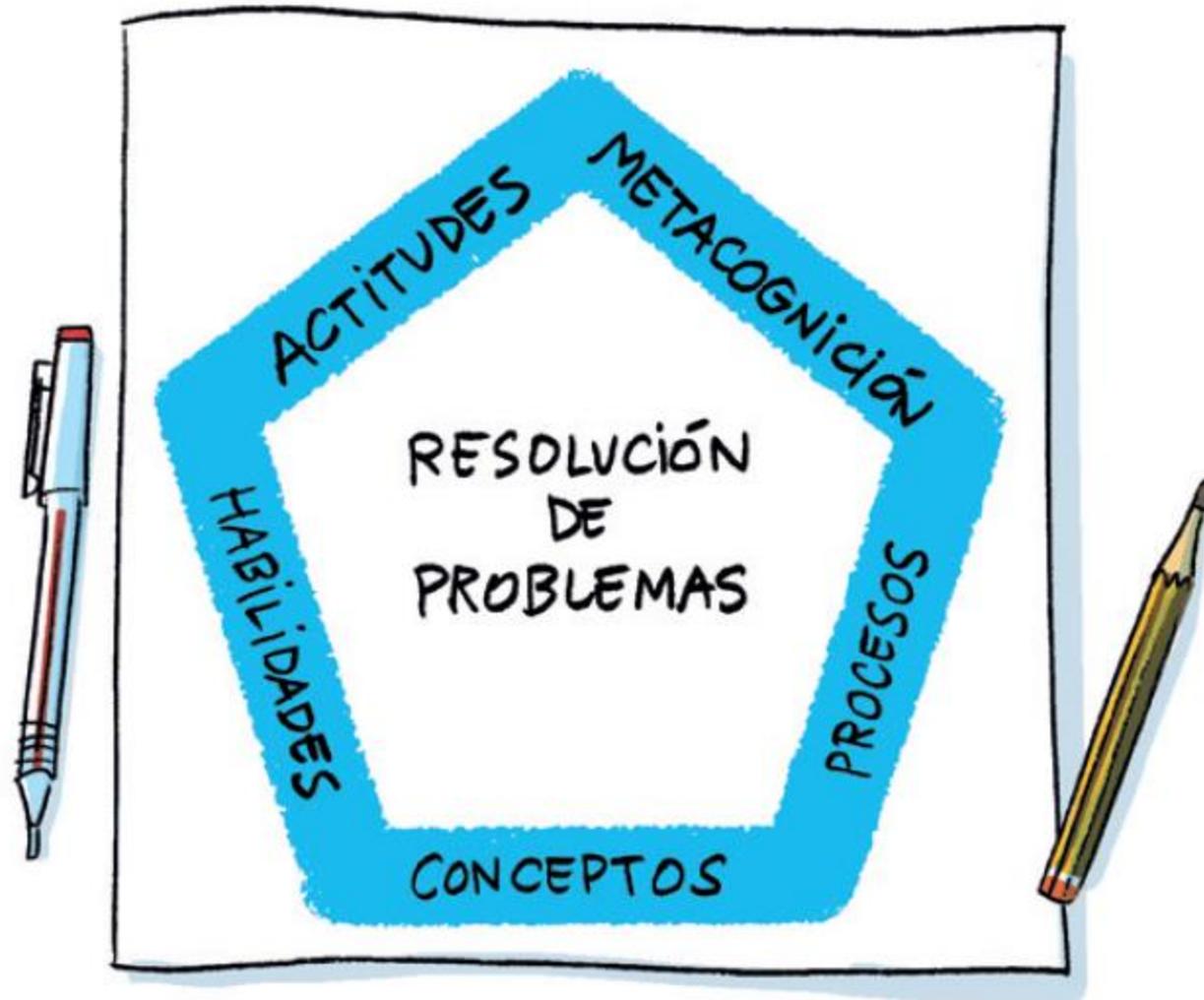
¿POR QUÉ  
RESOLVEMOS  
PROBLEMAS EN  
MATEMÁTICAS?

# PROCESOS MATEMÁTICOS

Para enseñar matemáticas, los procesos matemáticos son tan importantes como los contenidos.



# O EN EL “MÉTODO SINGAPUR”



# ¿CUÁNDO DEBEMOS HACERLO?

Siempre.

ta).

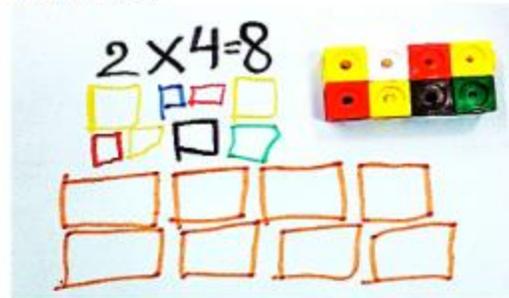
RAZ6/IM5



RAZ6/IM6



RAZ7/IM7



escubran,  
promueve los  
de solución).

RAZ7/IM8



# Contenidos:

- ¿Por qué resolvemos problemas en matemáticas? ¿Cuándo debemos hacerlo?
- **Métodos basados en palabras clave**
- Modelización y metacognición (De estrategias de cálculo/de situaciones-problema)
- Clasificación de los problemas aritméticos verbales.
- Método de fases y barras de Singapur.
- Más allá de la resolución de problemas:
  - Problemas abiertos.
  - Problemas con múltiples soluciones.
  - Problemas geométricos y visuales.
  - Otros problemas.
- Se puede utilizar calculadora para resolver problemas y otras preguntas.

# Métodos de resolución basados en palabras clave

En los modelos de resolución de problemas basados en palabras clave, *resolver problemas es:*

1. Buscar los números.
2. Saber qué operación tengo que hacer con los números.

1. Buscar los números es fácil. En muchos métodos, **no suelen faltar ni sobrar datos.**
2. Para encontrar la operación, me fijo en **palabras clave** (más, menos, entre los dos, quedan, en total).

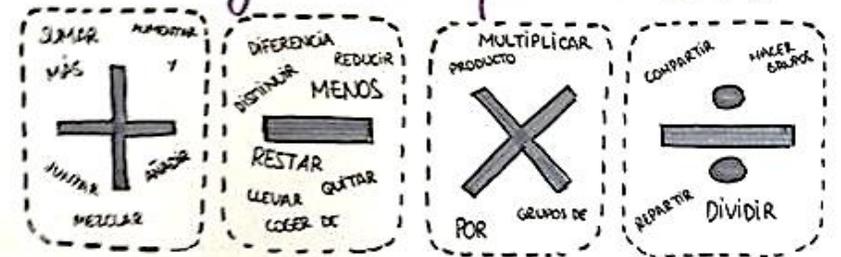
<https://www.pinterest.es/pin/415457134347394493/>

## ¿CÓMO RESUELVO UN PROBLEMA?

① Leo bien y pienso.

② Subrayo la pregunta y rodeo los datos.

③ Elijo la operación.



④ Escribo la solución y compruebo si he contestado bien.

# Métodos de resolución basados en palabras clave

educaplanet GRIN

## SUMAR

juntar en total  
suma más  
añadir aumentar

¿QUÉ ASPECTO TIENE?

$1 + 3 = 4$

educaplanet.com

educaplanet GRIN

## RESTAR

quitar menos  
restar quedan  
diferencia ¿cuántos más?

¿A qué se parece?

$5 - 2 = 3$

educaplanet.com

## Resolución de problemas

Atiende a las siguientes pistas para saber que operación hacer

**+** **SUMAR**

- En total
- Entre todos
- Me dan
- me encuentro
- Me regalan
- Ganar

**-** **RESTAR**

- ¿Cuánto falta para...?
- ¿Cuánto más tiene...?
- Quitar
- Perder
- Gastar
- Se van

# Métodos de resolución basado en palabras clave

*¿Qué problema tienen los métodos basados en palabras clave?*

**Ejercicio.** Con cada una de las palabras clave de esta lista, escribe un enunciado en el que haya que hacer la operación contraria. Por ejemplo, un problema de restar con la palabra "suma".

Palabras clave en matemáticas

<u>Suma (+)</u>	<u>Resta (-)</u>
- Suma	- menos
- total de	- Sobrante
- más	- para llevar
- y	- diferencia
- aumentado en	- menos que
- perímetro	- exceder
- en todo	- no son
- completo	- permanecer
	- ¿cuántos más?

# Métodos de resolución basados en palabras clave

- Los métodos de resolución con palabras clave son *métodos de fases muy simplificados*.
- Favorecen una *lectura superficial del enunciado, basada en localizar palabras clave*.
- No favorecen una lectura global.
- Los maestros suelen decir que los niños no razonan, saben operar, pero no leen los enunciados.
- El *método no favorece el razonamiento ni la lectura global*.

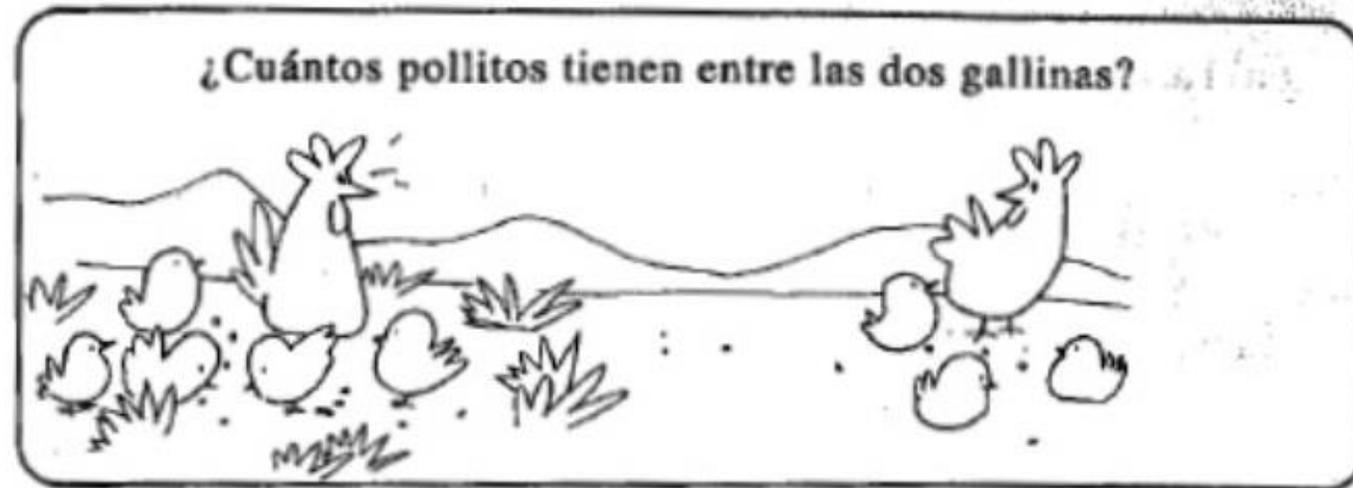
¿QUE hay que hacer?

PALABRAS CLAVE	OPERACIÓN	SIGNO
Juntar, unir, añadir...	Sumar	
Quitar, perder, gastar, separar...	Restar	
Juntar varias veces la misma cantidad...	Multiplicar	
Repartir...	Dividir	



# Métodos de resolución basados en palabras clave

¿Podrías adivinar cuál es la solución de cada uno de estos problemas?



[Redacted] 5 [Redacted] regala 2 [Redacted]  
¿ [Redacted] quedan [Redacted] ?

[Redacted] 4 [Redacted] 3 más.  
¿ [Redacted] ?

[Redacted] 7 [Redacted]  
[Redacted] marcharon 4 [Redacted]. ¿ [Redacted] quedan [Redacted] ?

# Métodos de resolución basados en palabras clave

Si lo has conseguido, quizá los problemas no sean demasiado buenos para estimular el razonamiento matemático.

Cuando en un libro, método, etc., casi todos los problemas pueden resolverse utilizando las operaciones que indican las palabras clave, no se favorece una lectura global, ni la comprensión del enunciado.



Ramón tenía 5 tebeos y le regala 2 a su hermano Enrique. ¿Cuántos tebeos le quedan a Ramón?

Un atleta consiguió 4 medallas y le dieron 3 más. ¿Cuántas medallas tendrá ahora?

En una casa habita una familia compuesta de 7 personas y se marcharon 4 a trabajar. ¿Cuántas personas quedan en la casa?

---

Un avión salió con 126 paracaidistas y regresó con 15.  
¿Cuántos paracaidistas participaron en la exhibición?

---

En una banda de música, 25 tocan la trompeta y 12 el violín. ¿Cuántos músicos componen la banda?

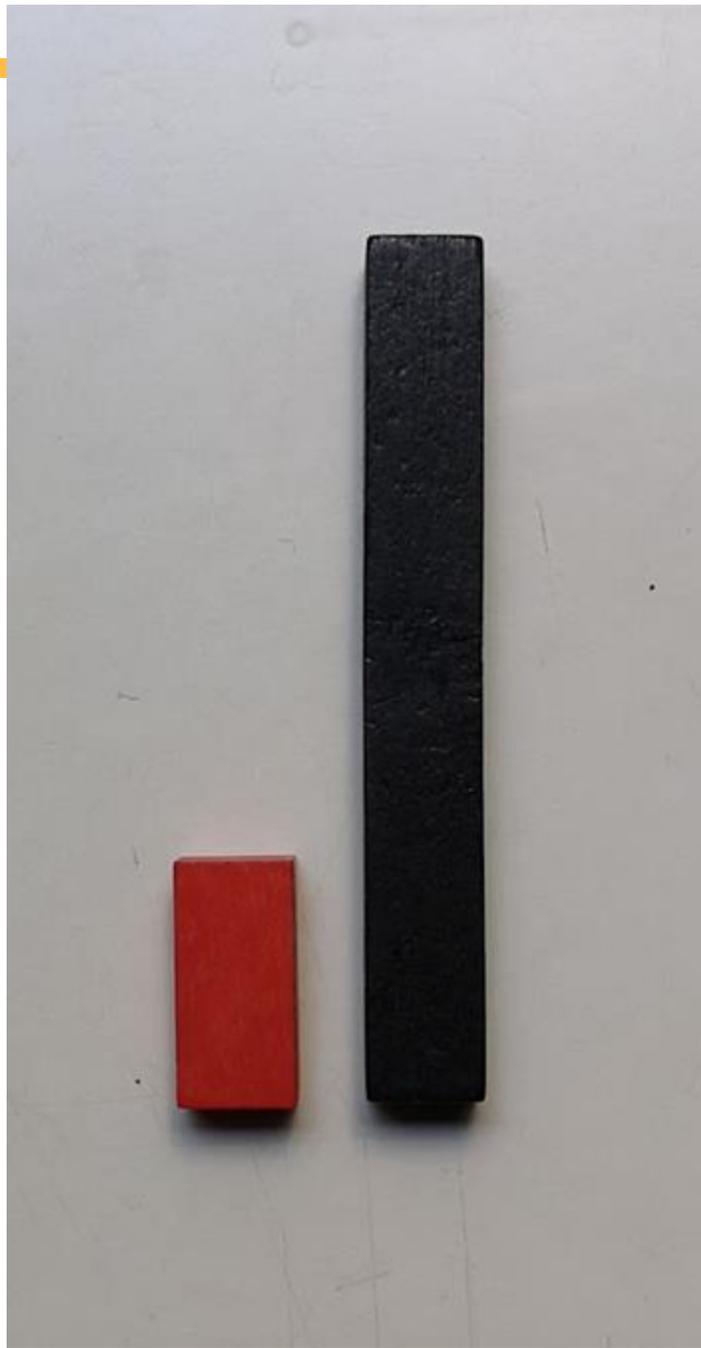
# Contenidos:

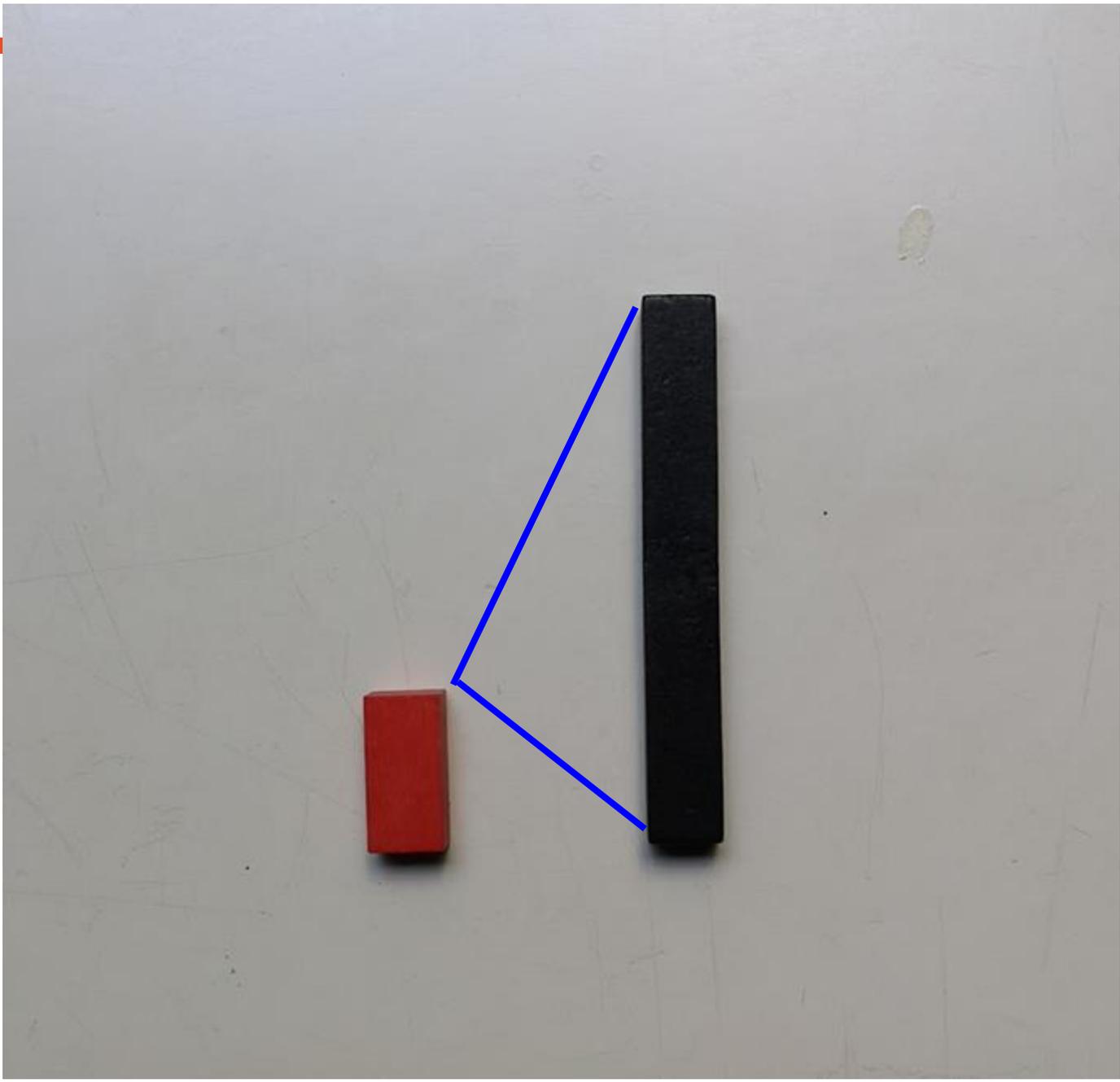
- ¿Por qué resolvemos problemas en matemáticas? ¿Cuándo debemos hacerlo?
- Métodos basados en palabras clave.
- **Modelización y metacognición (De estrategias de cálculo/de situaciones-problema)**
- Clasificación de los problemas aritméticos verbales.
- Método de fases y barras de Singapur.
- Más allá de la resolución de problemas:
  - Problemas abiertos.
  - Problemas con múltiples soluciones.
  - Problemas geométricos y visuales.
  - Otros problemas.
- Se puede utilizar calculadora para resolver problemas y otras preguntas.

---

*Julia tiene siete cartas, Inés tiene 2,  
¿cuántas tiene Julia más que Inés?*







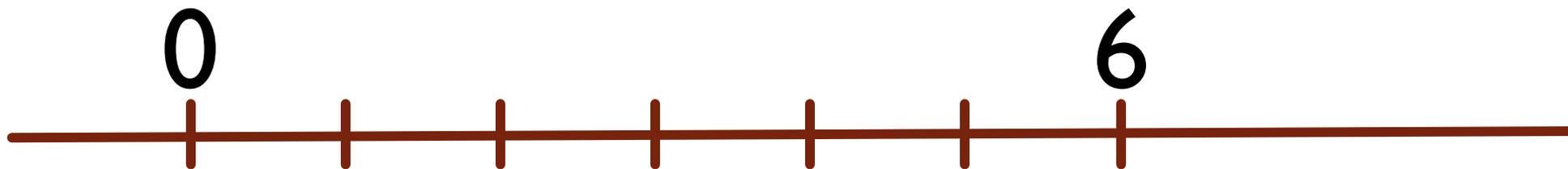
# Modelizando números

Con los cubos encajables, un **número** es una **colección de cubos**.

6



Con la recta numérica, un **número** es un **punto de la recta**.



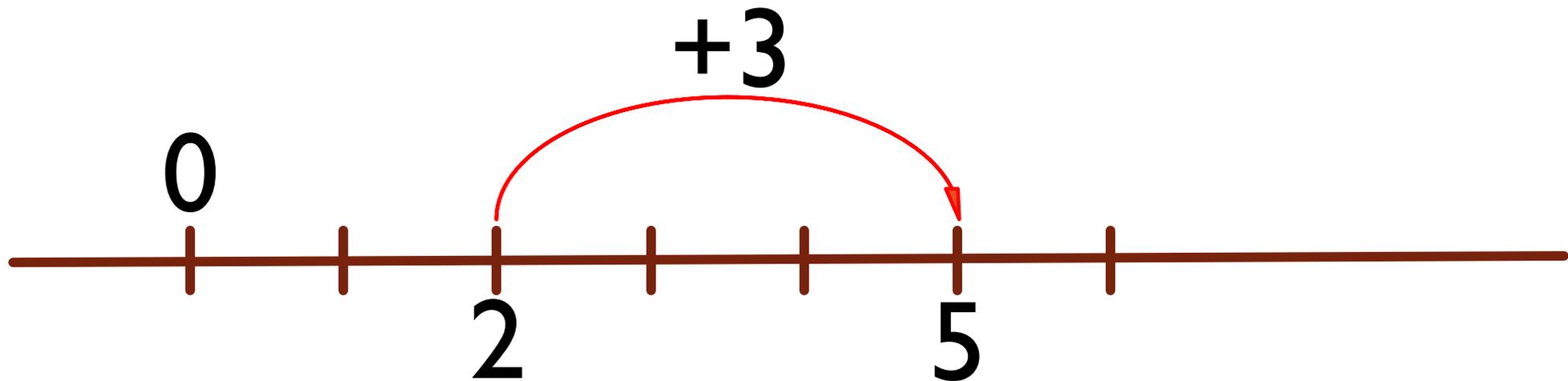
# Sumar

Con los cubos encajables, **sumar** es **juntar o añadir** y encontrar la cantidad que resulta

$$2 + 3$$



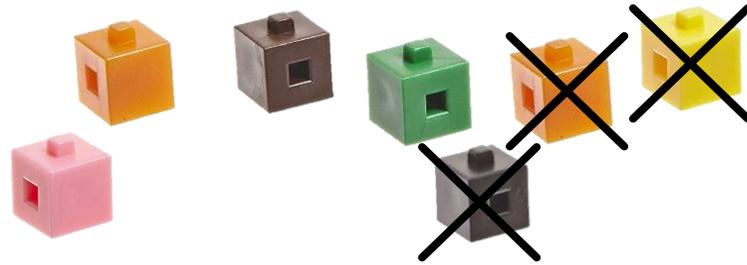
Con la recta numérica, un **sumar** es **moverte hacia delante** una distancia.



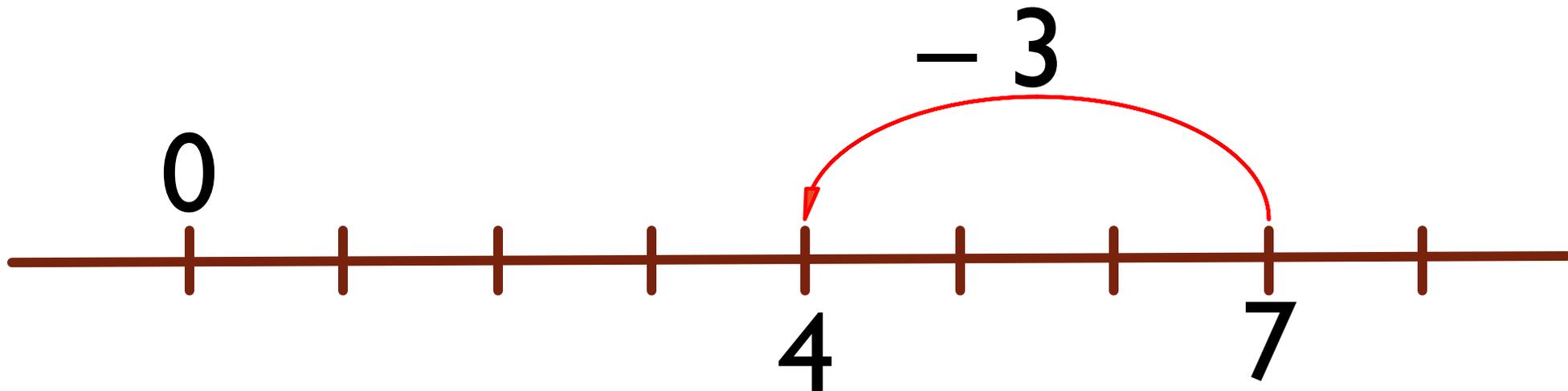
# Restar

Con los cubos encajables, **restar** es **quitar** y encontrar la cantidad que resulta.

$$7 - 3$$



Con la recta numérica, **restar** es **moverse hacia atrás** una distancia.



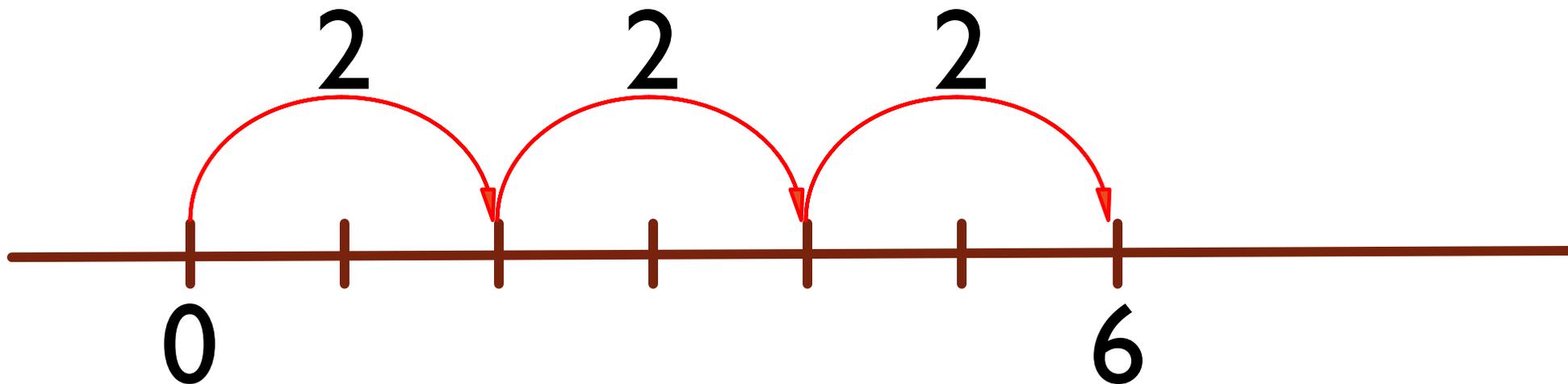
# Multiplicar

Con los cubos encajables, un **multiplicar** es **formar varios grupos iguales**, en particular, en forma de **matriz (disposición rectangular)**.

$$2 \times 3$$

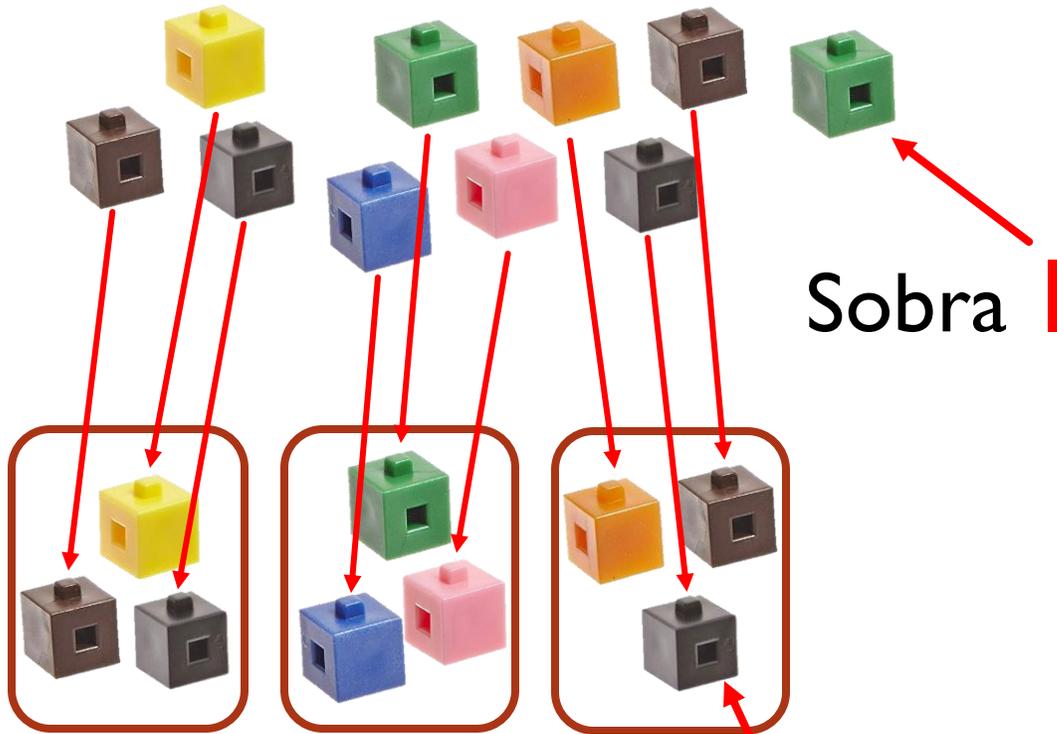


Con la recta numérica, **multiplicar** es dar **varios saltos iguales hacia adelante**.

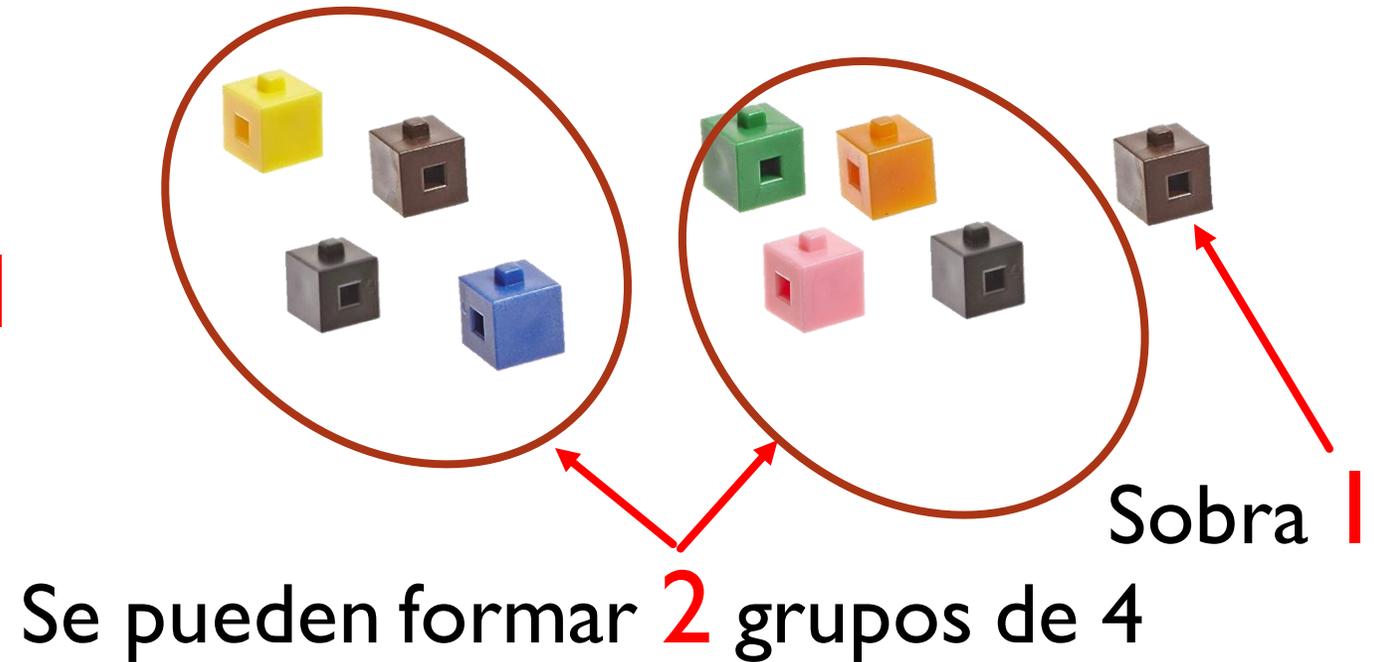


# Dividir

Con los cubos encajables, un **dividir** es **repartir en partes iguales** o **formar grupos iguales** y **contar cuántos grupos** puedes hacer.



$10 \div 3$  Tocan a **3** en cada grupo



Se pueden formar **2** grupos de 4

$9 \div 4$

# Metacognición

Se trata de indagar sobre el proceso que se ha seguido.

**¿Cómo lo has hecho? ¿Alguien lo ha resuelto de otra manera?**

# Contenidos:

- ¿Por qué resolvemos problemas en matemáticas? ¿Cuándo debemos hacerlo?
- Métodos basados en palabras clave.
- Modelización y metacognición (De estrategias de cálculo/de situaciones-problema)
- **Clasificación de los problemas aritméticos verbales.**
- Método de fases y barras de Singapur.
- Más allá de la resolución de problemas:
  - Problemas abiertos.
  - Problemas con múltiples soluciones.
  - Problemas geométricos y visuales.
  - Otros problemas.
- Se puede utilizar calculadora para resolver problemas y otras preguntas.

# Estructura aditiva

¿Porqué no decimos  
problemas de sumas y de  
restas?

# Problemas de cambio (creciente y decreciente)

Lee y resuelve.



La mamá de Daniel pone 4 ciruelas más,  
¿cuántas ciruelas hay ahora?

# Problemas de cambio (creciente y decreciente)

**R**esuelvo problemas. **Aplico todos los pasos**

Lee el problema.



Sonia tenía en su ordenador 67 dibujos, creados con su programa de dibujo favorito. Esta semana ha dibujado 29 más. ¿Cuántos dibujos tiene ahora en su ordenador?

# Problemas de cambio (creciente y decreciente)

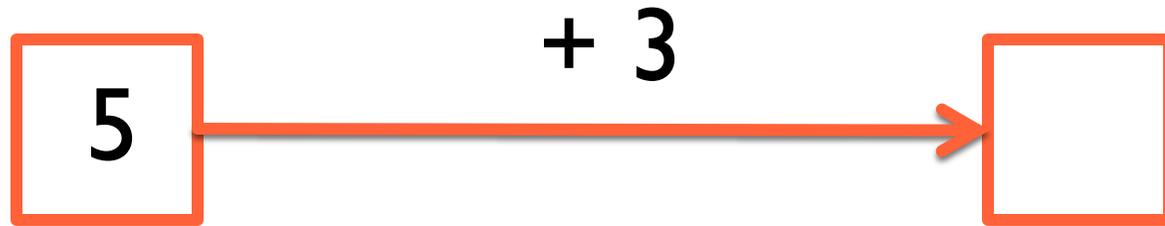
2 Lee y resuelve.



Ana tiene 8 monedas en su . Saca 3 monedas. ¿Cuántas monedas le quedan?

# Problemas de cambio creciente

Un niño tiene 5 canicas cuando comienza a jugar. Durante el juego gana tres canicas. ¿Cuántas canicas tendrá al final?



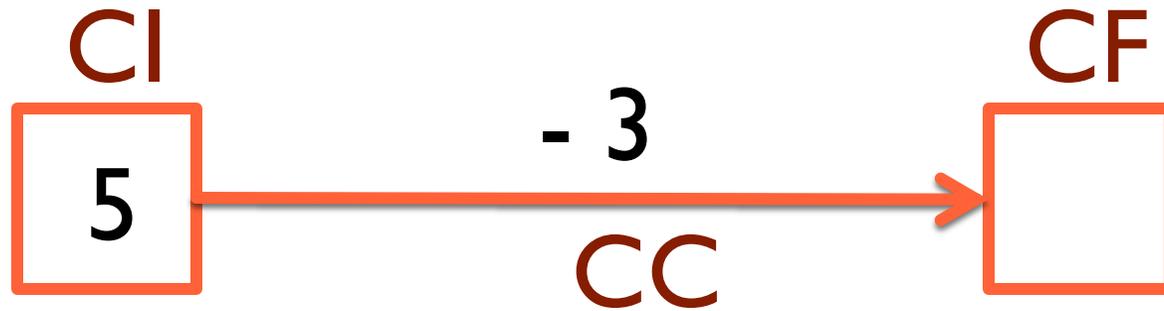
$$5 + 3 = \square$$

$$5 + \square = 8$$

$$\square + 3 = 8$$

# Problemas de cambio decreciente

Un niño tiene 5 canicas cuando comienza a jugar. Durante el juego pierde tres canicas. ¿Cuántas canicas tendrá al final?



$$5 - 3 = \square \quad 5 - \square = 2 \quad \square - 3 = 2$$

# Problemas de cambio

	Cantidad inicial	Cantidad de cambio	Cantidad final	Creciente	Decreciente	Operación
Cambio 1	$d$	$d$	$i$	*		Suma
Cambio 2	$d$	$d$	$i$		*	Resta
Cambio 3	$d$	$i$	$d$	*		Resta
Cambio 4	$d$	$i$	$d$		*	Resta
Cambio 5	$i$	$d$	$d$	*		Resta
Cambio 6	$i$	$d$	$d$		*	Suma

**Nota:**  $d$  es el dato e  $i$  la incógnita.

# Problemas de combinación

Lee y resuelve.



Si de esas fotos, 25 son de camaleones, ¿cuántas fotos de tortugas tienen para su trabajo de reptiles?

# Problemas de combinación

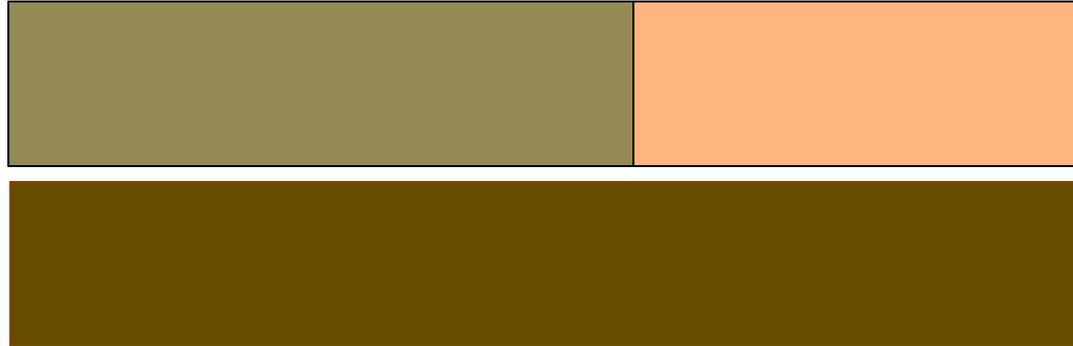
Lee y resuelve.



En la tableta tengo instalados 49 juegos. Si 12 de ellos son de lengua, ¿cuántos juegos tengo de cálculo?

# Problemas de combinación

Juan tiene 3 pinturas y Carmen tiene 4.  
¿Cuántas tienen entre los dos?



Partes (3 y 4)

Todo (7)

	Parte	Parte	Todo	Operación
Combinación 1	$d$	$d$	$i$	Suma
Combinación 2	$d$	$i$	$d$	Resta

# Problemas de comparación

Lee y resuelve.



Con la ayuda de todos los colegios, este año se construirán 7 pozos más que el año pasado. ¿Cuántos pozos se construirán este año?

# Problemas de comparación

**R**esuelvo problemas. **Aplico todos los pasos**

Lee y resuelve.



La profesora nos ha recomendado una página de Internet para mejorar el cálculo mental. Inés ha conseguido 65 puntos, y Mario, 97. ¿Cuántos puntos más ha conseguido Mario?

# Problemas de igualdad

Lee, busca los datos y resuelve.



Jorge tiene 9 cómics, y Carlota, solamente 6. ¿Cuántos cómics le faltan a Carlota para tener los mismos cómics que Jorge?

# Problemas de igualdad

Lee y resuelve.

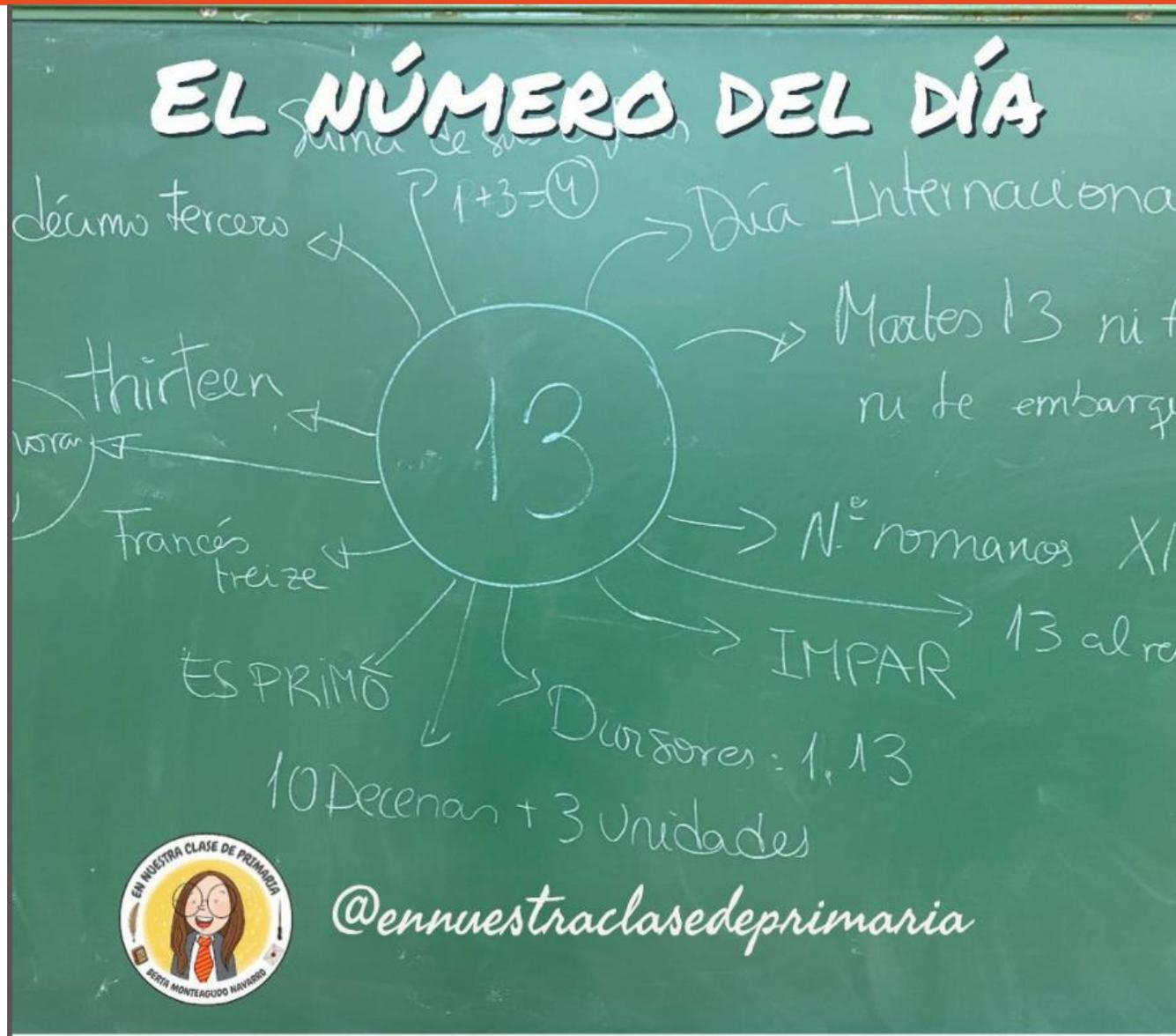
Mario tiene 28 cochecitos, y su amigo Quique, 21.  
¿Cuántos cochecitos le faltan a Quique para tener los mismos que Mario?







# ¿Qué sabemos del número del día?



@ennuestraclasedeprimaria

¿Qué sabemos del número del día?

24 es:

## PAEV estructura aditiva

$$5 + 3 = \square \quad 5 + \square = 8 \quad \square + 3 = 8$$



**Cambio**

Un niño tiene 5 canicas cuando comienza a jugar. Jugando consigue otras tres canicas. ¿Cuántas canicas tendrá al final?



**Combinación**

Llevo 5 euros en el bolsillo derecho y otros tres en la mano, ¿Cuánto dinero tengo?



**Comparación**

Llevo leídas 5 páginas de un libro, 3 menos que mi hermana, ¿cuántas ha leído ella?



**Igualación**

Tengo 5 lápices, si consigo otros 3 tendré los mismos que tiene Carmen, ¿cuántos lápices tiene Carmen?

# PAEV estructura multiplicativa

$$5 \times 3 = \square$$

-  **Grupos repetidos** Tengo 3 bolsas con 5 canicas cada una, ¿cuántas canicas tengo?
-  **Combinación** He traído a las JAEM 5 camisetas y 3 bermudas, ¿de cuántos maneras distintas puedo vestirme?
-  **Comparación** Llevo leídas 5 páginas de un libro, mi hermana ha leído 3 veces más páginas que yo, ¿cuántas ha leído ella?
-  **Razón** He comprado 5 lápices, a 3€ cada uno, ¿cuántos me han cobrado?

# PAEV estructura multiplicativa

$$5 \times \square = 15$$

-  **Grupos repetidos** Tengo 3 bolsas con 5 canicas cada una, ¿cuántas canicas tengo?
-  **Combinación** Con las 5 camisetas y las bermudas que he traído a las JAEM me puedo vestir de 15 maneras distintas, ¿cuántas bermudas he traído?
-  **Comparación** Llevo leídas 5 páginas de un libro, mi hermana ha leído 3 veces más páginas que yo, ¿cuántas ha leído ella?
-  **Razón** He comprado 5 lápices, a 3€ cada uno, ¿cuántos me han cobrado?

# PAEV estructura multiplicativa

$$\square \times 3 = 15$$

 Grupos repetidos

Tengo 15 canicas en 3 bolsas, todas con el mismo número de canicas, ¿cuántas canicas hay en cada bolsa?

# PAEV estructura multiplicativa

$$5 \times \square = 15$$

 Grupos repetidos

Quiero poner 15 canicas en bolsas con 5 canicas cada una,  
¿cuántas bolsas necesito?

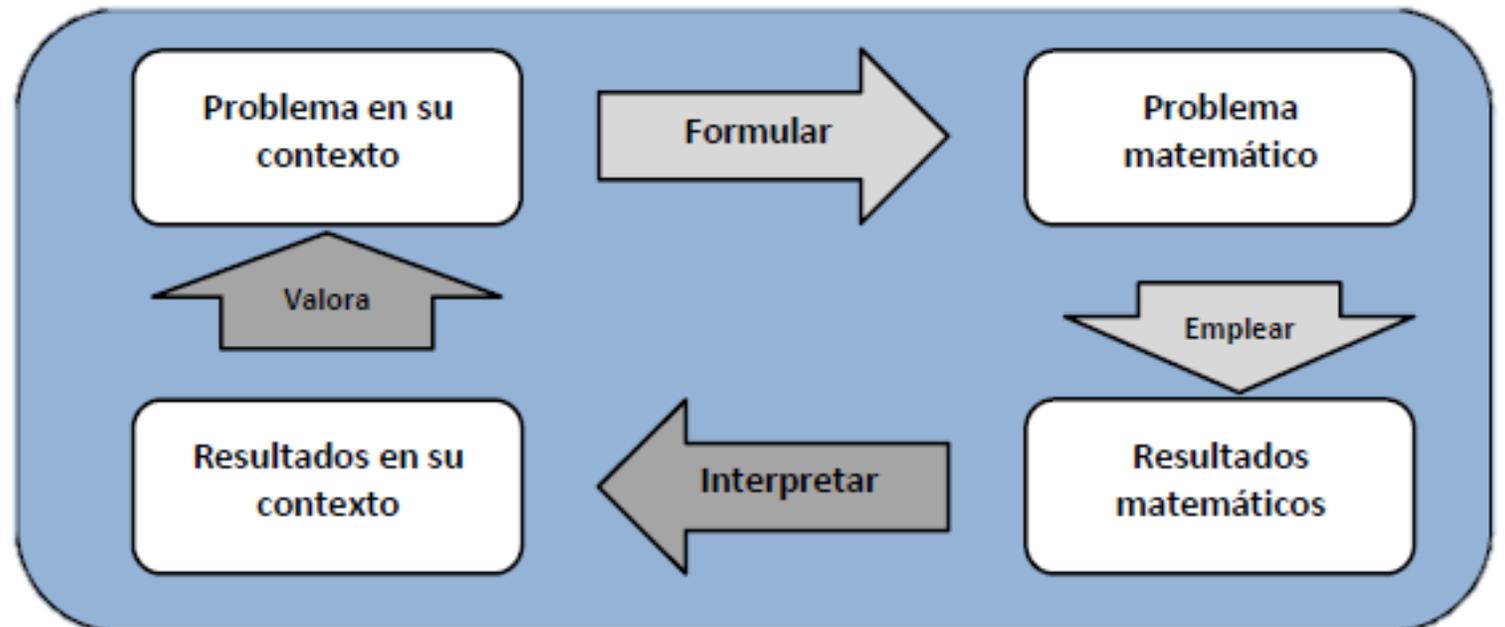
# Contenidos:

- ¿Por qué resolvemos problemas en matemáticas? ¿Cuándo debemos hacerlo?
- Métodos basados en palabras clave.
- Modelización y metacognición (De estrategias de cálculo/de situaciones-problema)
- Clasificación de los problemas aritméticos verbales.
- **Método de fases y barras de Singapur.**
- Más allá de la resolución de problemas:
  - Problemas abiertos.
  - Problemas con múltiples soluciones.
  - Problemas geométricos y visuales.
  - Otros problemas.
- Se puede utilizar calculadora para resolver problemas y otras preguntas.

# Los modelos de fases para la resolución de problemas

1. Lectura y comprensión del problema
2. Elaboración de un plan / modelización / traducción
3. Ejecución del plan / Cálculo
4. Solución y revisión / comprobación

Estas fases coinciden con el ciclo de construcción de modelos matemáticos que se da en la modelización.



# Fase I. Lectura y comprensión del problema

Es una fase de trabajo con el enunciado verbal del problema. No solo implica la lectura atenta del enunciado o varias lecturas del mismo. Se pueden hacer diversas actividades para favorecer la lectura y comprensión de enunciados de problemas.

## **R**esuelvo problemas. **Ordeno el enunciado**

Escribe el enunciado ordenado y resuelve.

- ¿cuántos vasos se han bebido?
- Preparamos 72 vasos de refrescos para la inauguración.
- Si quedan 28 vasos llenos,



# Fase I. Lectura y comprensión del problema

Completar el enunciado del problema ordenando las frases que lo forman.

Escribe ordenado el enunciado y resuelve.

- Lucas ha tardado 15 minutos más que Marina.
- ¿En cuántos minutos hizo Lucas los deberes?
- Marina ha hecho los deberes en 25 minutos.

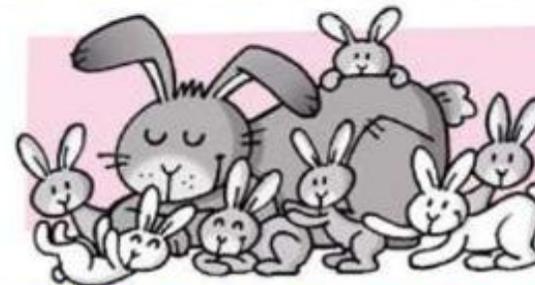


# Fase I. Lectura y comprensión del problema

## Resuelvo problemas. Selecciono los datos

Lee los problemas y resuelve.

- Hemos contado 43 gazapos y 12 conejas en la conejera. Todos los gazapos son grises, menos 19 que son blancos.
- ¿Cuántos gazapos grises hay?



- Subraya la pregunta y escribe los datos.

- Escribe la solución.

- Realiza la operación.


Ver si hay datos superfluos que no son necesarios para la resolución. Decidir qué datos emplear.

# Fase I. Lectura y comprensión del problema

## Resuelvo problemas. Selecciono la pregunta

Lee, elige la pregunta y resuelve.

Nerea tiene un vídeo de animales venenosos que dura 115 minutos y Carla tiene un vídeo sobre reptiles que dura 97 minutos.



• Elige y subraya la pregunta.

- ¿Cuántos animales venenosos salen en el vídeo?
- ¿Cuántos minutos dura el vídeo de Carla?
- ¿Cuántos minutos más dura el vídeo de Nerea que el de Carla?

• Escribe la solución.

• Realiza la operación.


Completar la redacción del enunciado del problema incorporando la pregunta que falta elegida entre varios.

# Fase I. Lectura y comprensión del problema

Completar la redacción del enunciado del problema incorporando un dato que falta elegido entre varios.

Lee, identifica el dato que falta y resuelve.



Hoy, algunos esquiadores se han quedado en el albergue por la ventisca, pero trescientos veinticinco han subido a las pistas. ¿Cuántos esquiadores había en la estación de esquí?

- Rodea los datos que necesitas.

En la pista hay 325 esquiadores.

En la ciudad se han quedado 115 esquiadores.

En el albergue se han quedado 267 esquiadores.

# Fase I. Lectura y comprensión del problema

Completar la redacción del enunciado del problema escribiendo la pregunta.

## **R**esuelvo problemas. **Escribo la pregunta**

Lee, inventa la pregunta y resuelve.

El mes pasado pagamos de electricidad un recibo de 203 euros. Después de cambiar las bombillas y la lavadora, este mes hemos pagado 149 euros.



• **Escribe los datos.**

• **Realiza la operación.**

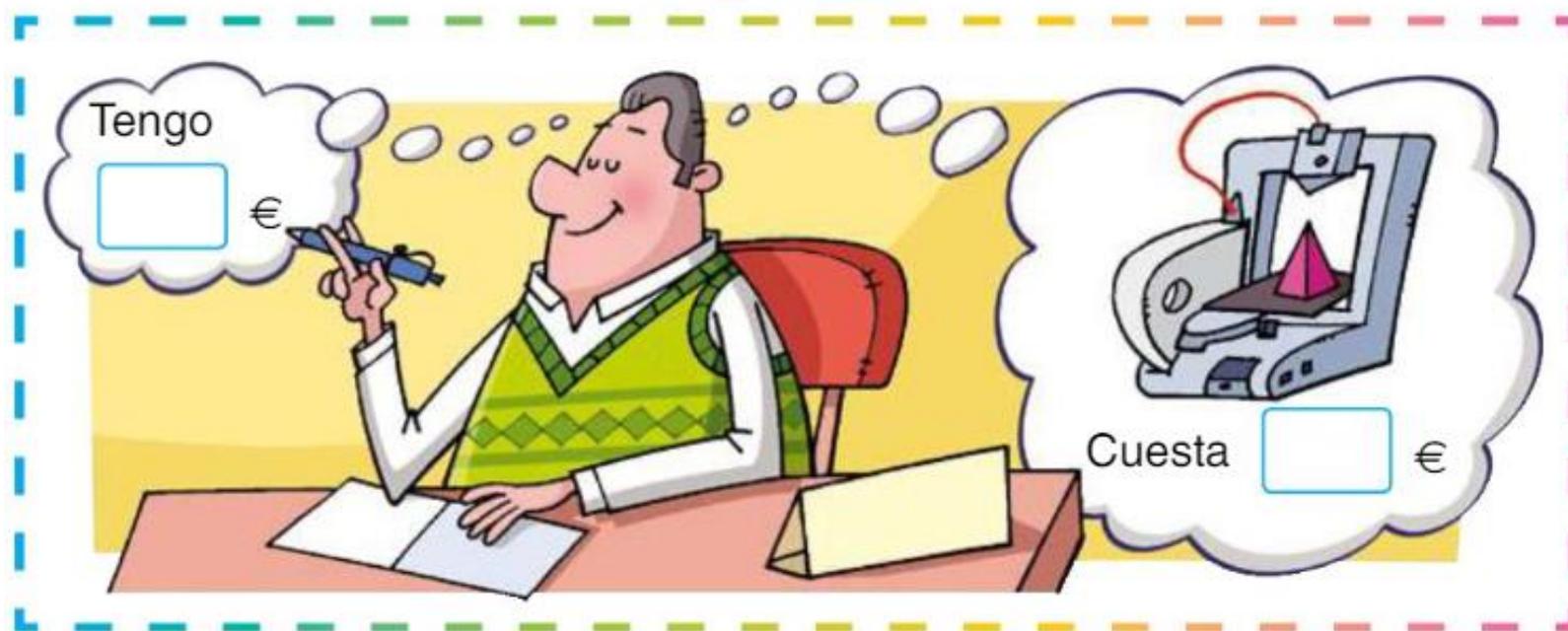

• **Escribe la solución.**

# Fase I. Lectura y comprensión del problema

## **R**esuelvo problemas. **Invento el problema**

Inventa un problema que se resuelva con esta operación:

$$931 - 464$$



Invención de problemas.  
Se trata de inventar un enunciado que se resuelva con una operación dada.

# Los modelos de fases para la resolución de problemas

Un ejemplo de modelo de fases es el Método Singapur para la resolución de problemas.

## PASOS DEL MÉTODO GRÁFICO DE SINGAPUR



Leer con atención el problema completo.



Decidir de qué o de quién se habla en el problema.



Dibujar una barra unidad para cada sujeto del problema.



Leer el problema de nuevo; esta vez deteniéndose en cada frase o en cada número, si hay más de uno por frase.



Ilustrar la barra o las barras unidad con la información que proporciona el problema.



Identificar la pregunta del problema e ilustrarla.



Realizar las operaciones correspondientes y escribir el resultado en el gráfico.

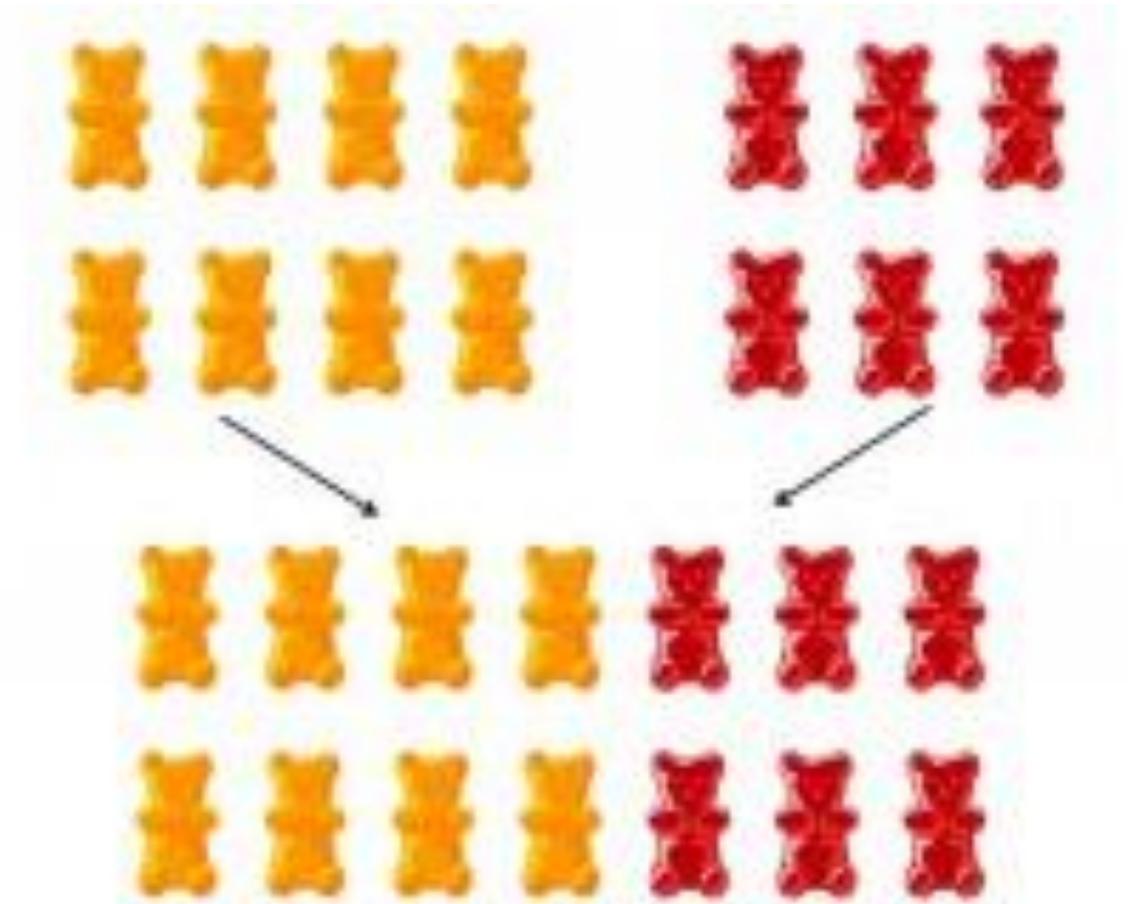


Escribir la respuesta del problema como una oración completa.

## Fase 2. Elaboración de un plan / modelización / traducción

En la segunda fase, se elabora un modelo que sirve para traducir el enunciado verbal a un lenguaje matemático por medio de materiales manipulativos, dibujos...

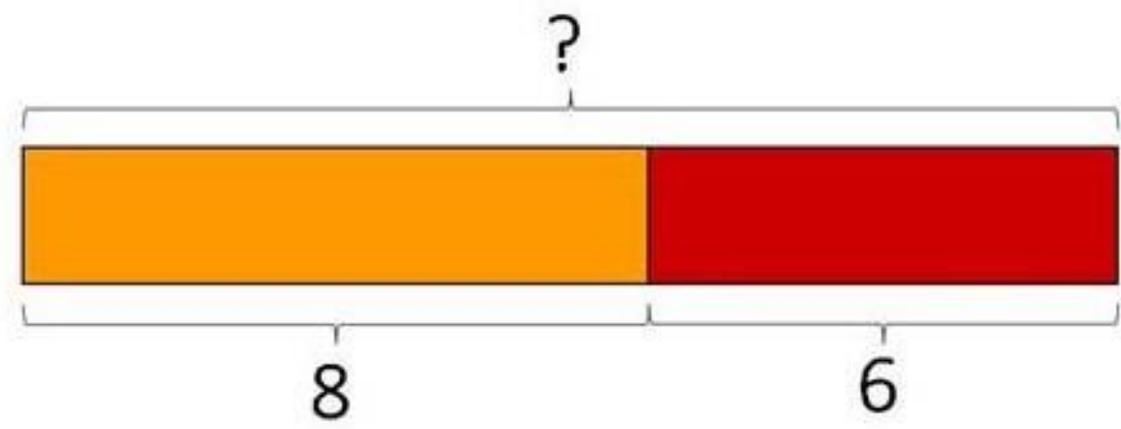
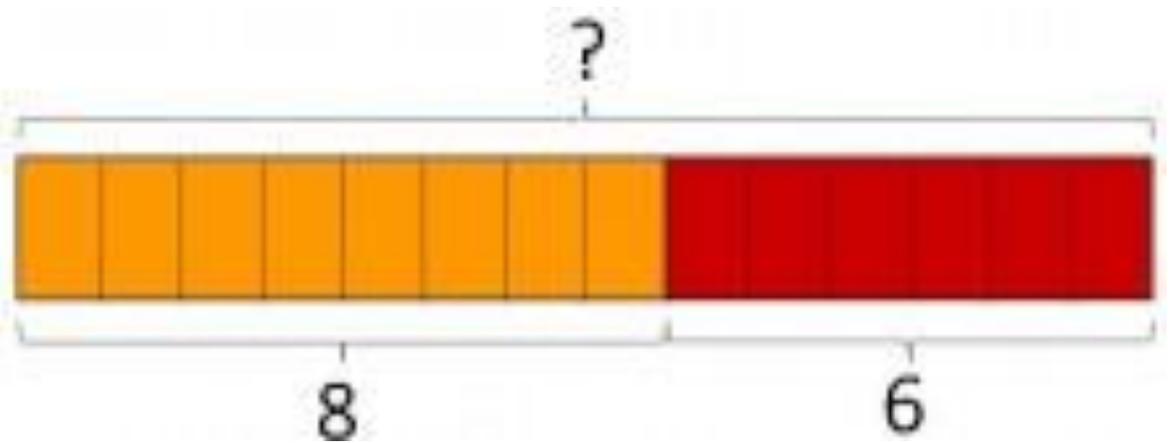
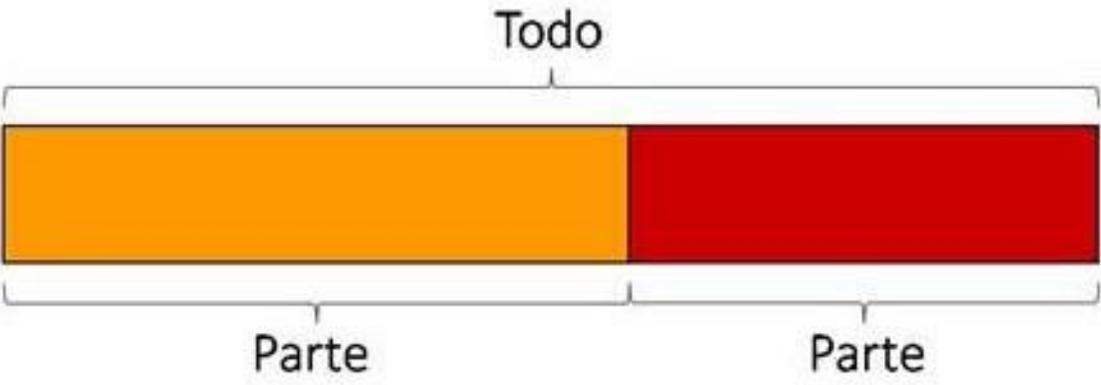
Claudia tiene 8 ositos de goma.  
Sergio tiene 6 ositos de goma.  
¿Cuántos ositos de goma tienen entre los dos?



## Fase 2. Elaboración de un plan / modelización / traducción

Un material muy usado para elaborar estos modelos son los cubos encajables. Cuando las cantidades son mayores se empiezan a utilizar barras continuas dibujadas.

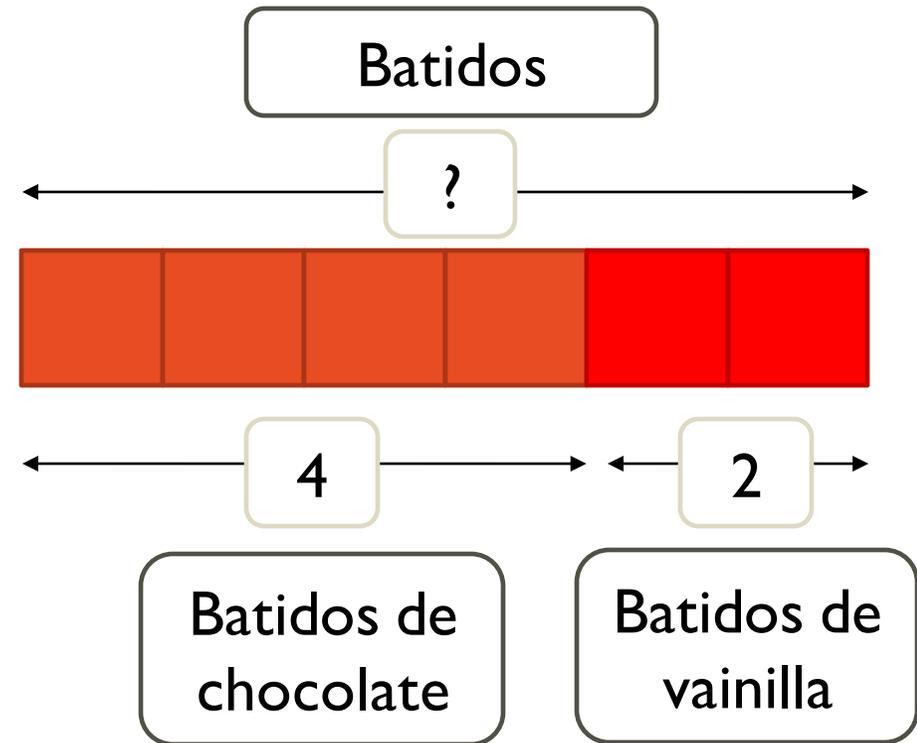
Claudia tiene 8 ositos de goma.  
Sergio tiene 6 ositos de goma.  
¿Cuántos ositos de goma tienen entre los dos?



## Fase 2. Elaboración de un plan / modelización / traducción

Para los problemas de combinación y de cambio se utiliza el **modelo de barras parte-todo**, que se ajusta mejor a los problemas de combinación.

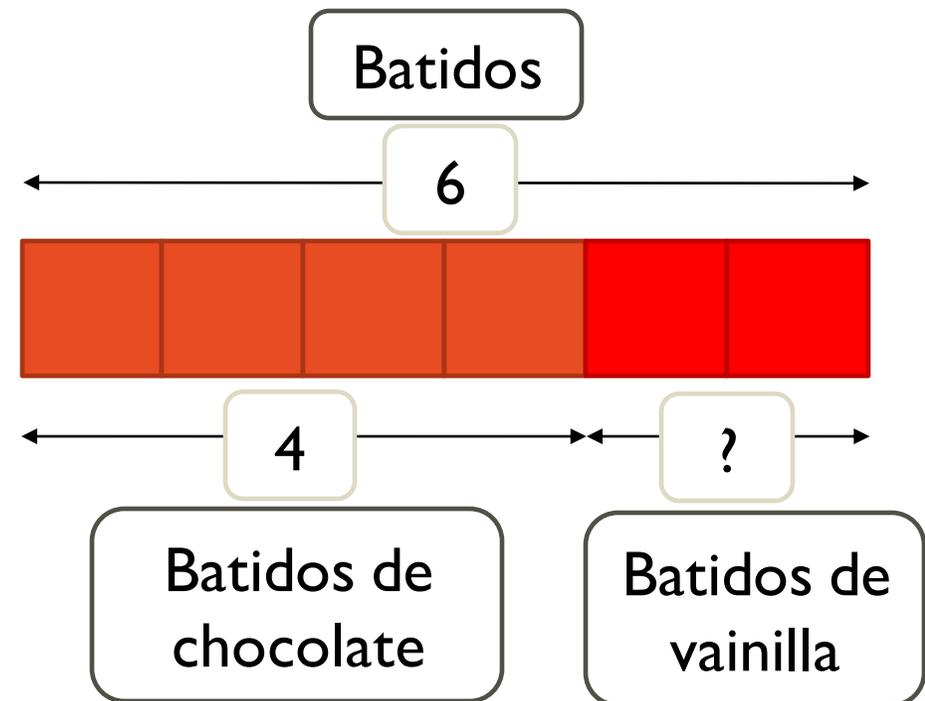
Voy a hacer la compra, y quiero comprar 4 batidos de chocolate y 2 de vainilla. ¿Cuántos batidos quiero comprar?



## Fase 2. Elaboración de un plan / modelización / traducción

Lo único que cambia en los problemas de combinación 2 es la posición de la incógnita, que es ahora una parte. Los problemas de cambio se adaptan también a este modelo.

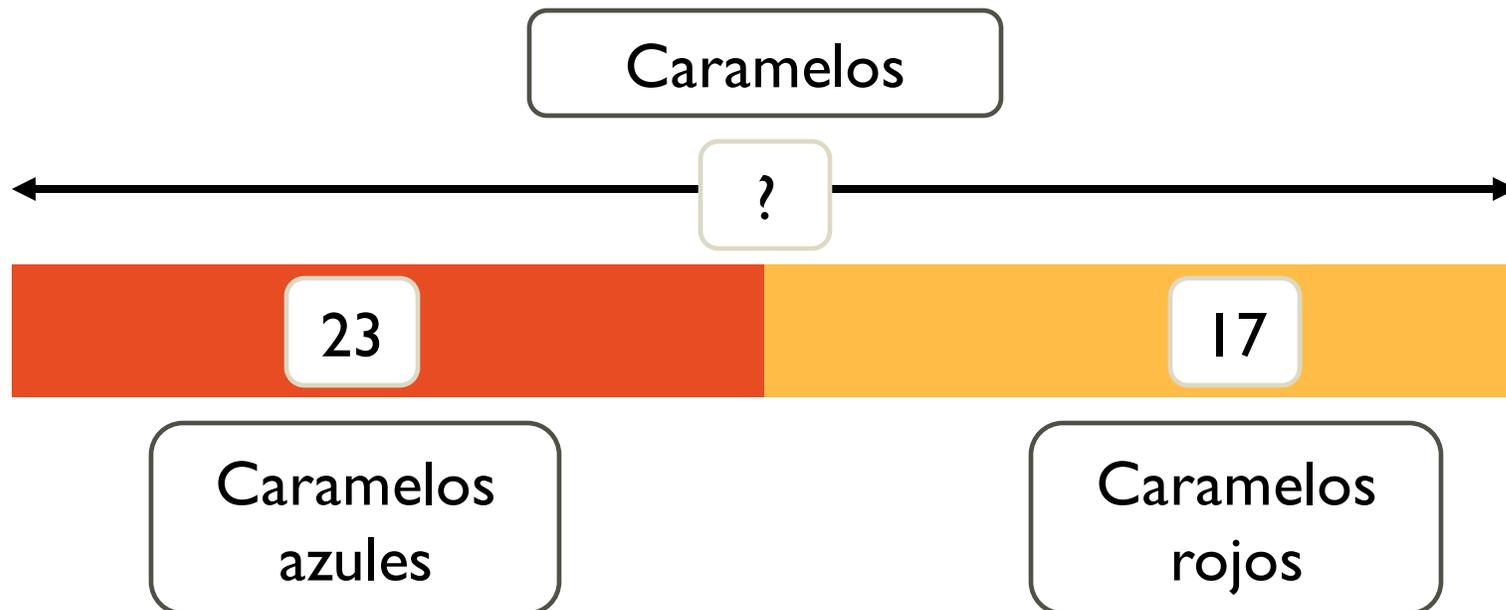
Voy a hacer la compra, y quiero comprar 6 batidos. Quiero comprar 4 de chocolate y algunos de vainilla. ¿Cuántos batidos de vainilla quiero comprar?



## Fase 2. Elaboración de un plan / modelización / traducción

Con cantidades grandes, se pasa a las barras dibujadas. No es necesario que el dibujo guarde proporción con las cantidades, porque el objetivo es elaborar un plan (determinando la operación).

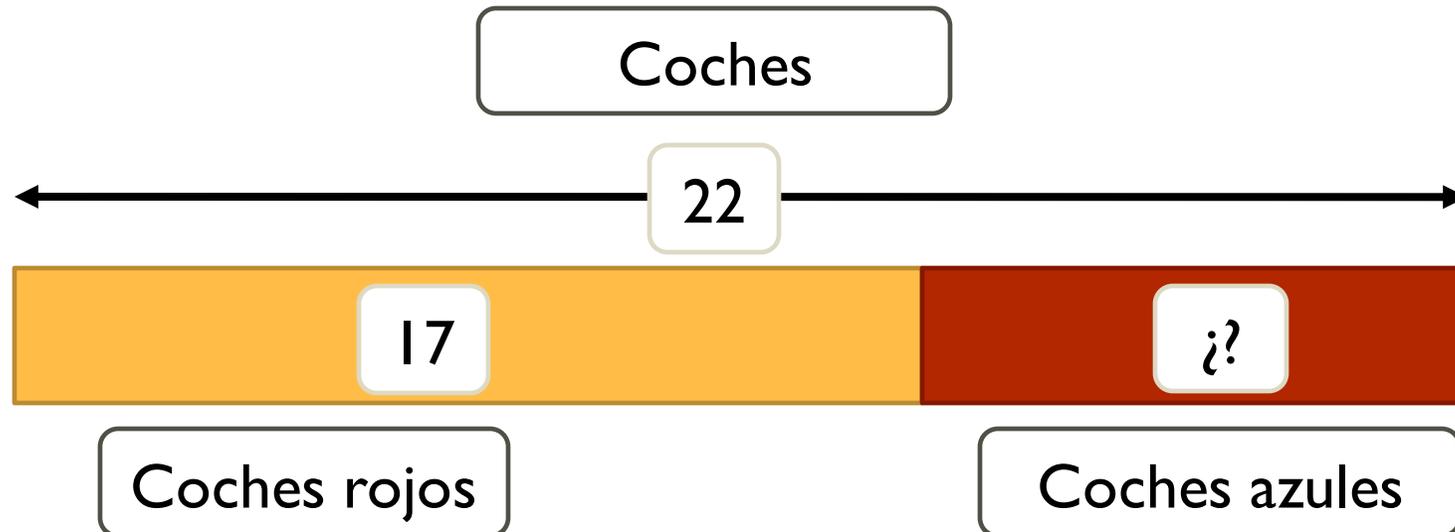
Mi amigo Pepe tiene 23 caramelos azules y 17 caramelos rojos.  
¿Cuántos caramelos hay en total?



## Fase 2. Elaboración de un plan / modelización / traducción

La falta de proporcionalidad se puede ver en problemas en los que la incógnita es una parte. Lo importante es que el modelo me ayude a pensar el problema.

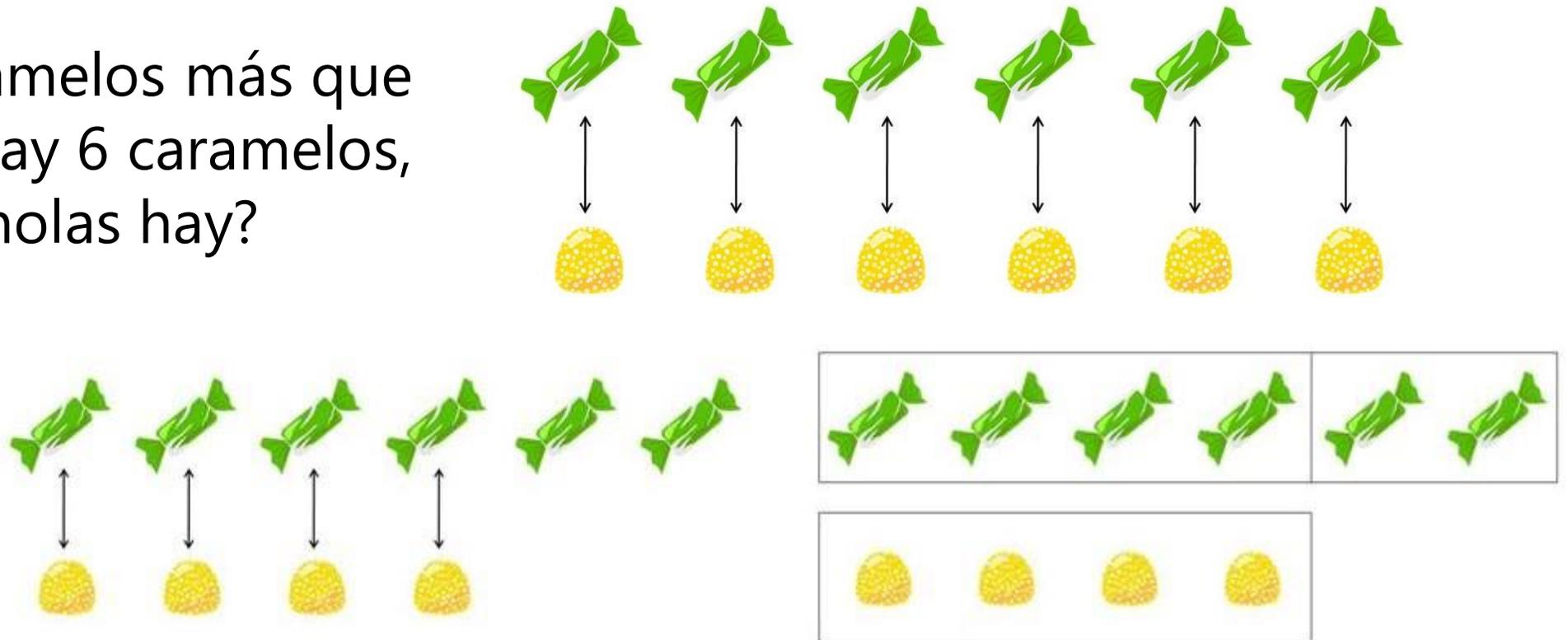
En el aparcamiento de un hotel hay 22 coches. 17 son rojos y el resto azules. ¿Cuántos coches azules hay en el aparcamiento?



## Fase 2. Elaboración de un plan / modelización / traducción

El modelo de comparación se usa en los problemas de comparación e igualdad y está relacionado con la estrategia de correspondencia uno a uno. Primero se hace con cantidades pequeñas.

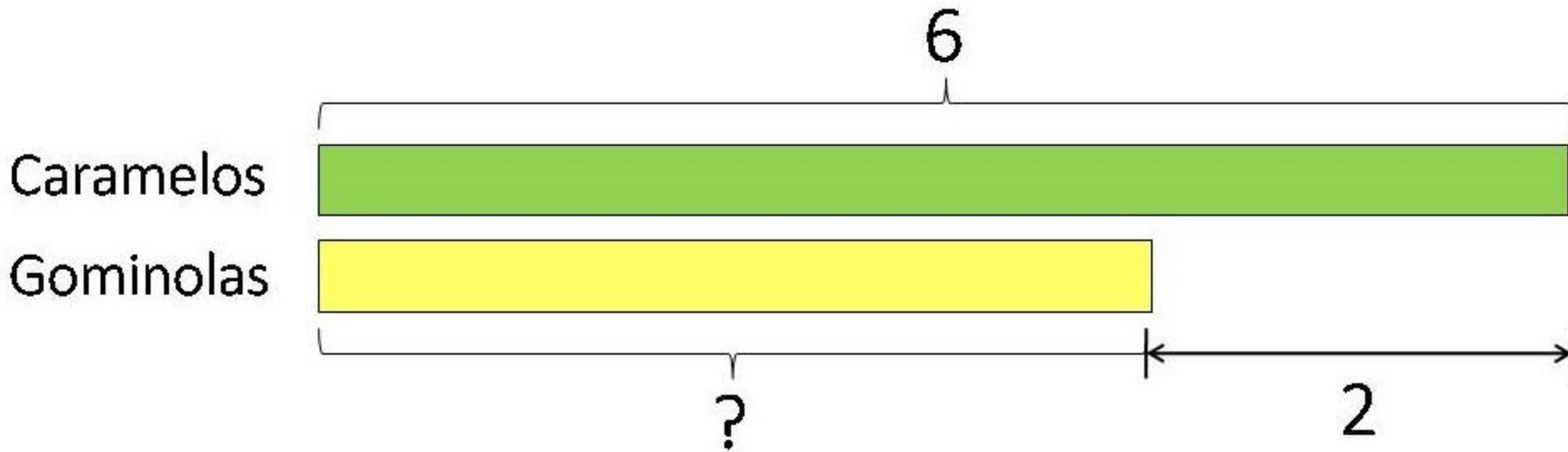
Tenemos 2 caramelos más que gominolas. Si hay 6 caramelos, ¿cuántas gominolas hay?



## Fase 2. Elaboración de un plan / modelización / traducción

Los problemas de comparación y los de igualdad se representan de forma diferente a los de cambio y combinación, colocando dos barras en paralelo que se comparan (o que hay que igualar).

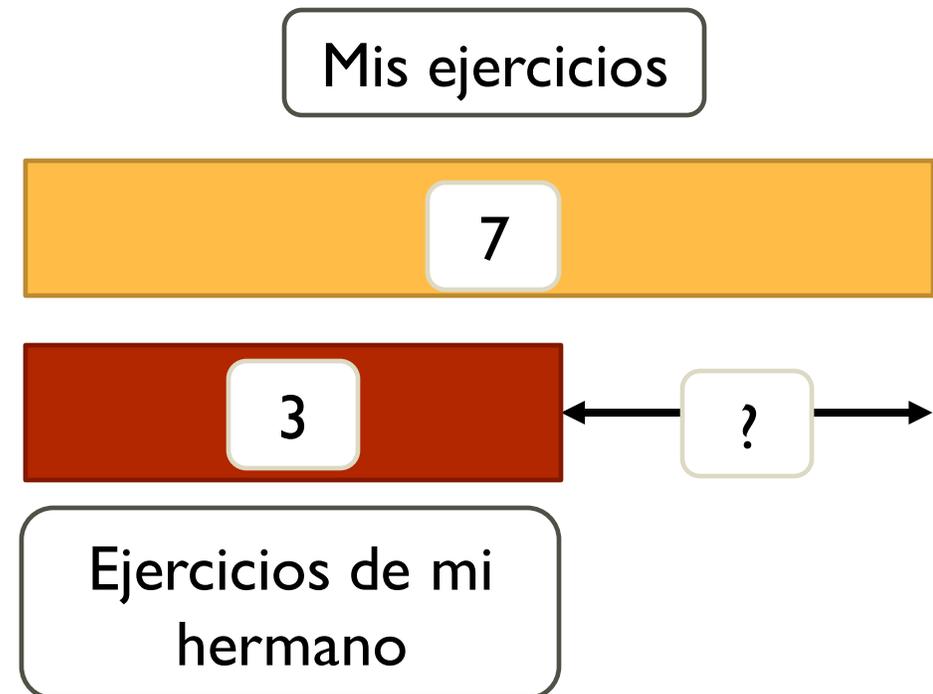
Tenemos 2 caramelos más que gominolas. Si hay 6 caramelos, ¿cuántas gominolas tenemos?



## Fase 2. Elaboración de un plan / modelización / traducción

Independientemente de que la comparación sea con más o con menos, el modelo de comparación ayuda a darnos cuenta de que la operación es una resta cuando la incógnita es la diferencia.

En el colegio me han mandado 7 ejercicios de deberes y, a mi hermano pequeño, 3. ¿Cuántos ejercicios menos que a mi le han mandado a mi hermano pequeño?



# Integración de la fase 2 (modelo de barras)

La modelización con barras de Singapur se integra con las demás fases de la resolución.

Aplicados a un problema concreto, los pasos básicos se desarrollan de la siguiente manera:



El procedimiento comienza con la lectura atenta del enunciado del problema.

María fue a la tienda y compró 6 galletas. Su tío Juan le regaló 5 más. ¿Cuántas galletas tiene María?



Después, se decide de qué o de quién se habla en el problema. Si es necesario, se repite la lectura.

¿De qué se habla?

*Galletas*

¿De quién se habla?

*de María*



Se dibuja una barra unidad para cada sujeto del problema. Por lo común, la barra unidad es un rectángulo muy sencillo.



## Integración de la fase 2 (modelo de barras)



Luego, se lee el problema otra vez, deteniéndose en cada frase o en cada número, si hay más de uno por frase.



Al mismo tiempo que se lee el problema, se ilustran las barras unidad con la información que se obtiene del problema.

- (1) María fue a la tienda y compró 6 galletas.
- (2) Su tío Juan le regaló 5 más.
- (3) ¿Cuántas galletas tiene María?

¿De qué se habla?

*Galletas*

¿De quién se habla?

*de María*

Compró 6	Regalaron 5
-------------	----------------

# Integración de la fase 2 (modelo de barras)

Según la representación gráfica, el problema dice que:

- (1) María compró 6 galletas.
- (2) Su tío Juan le regaló 5 más.

 El siguiente paso consiste en identificar la pregunta del problema e ilustrarla con un signo de interrogación. En este caso, se pregunta sólo por las galletas que tiene María.

¿De qué se habla? <i>Galletas</i>	¿De quién se habla? <i>de María</i>
--------------------------------------	--

(1) Compró 6	(2) Regalaron 5
-----------------	--------------------

  
• 11

## Integración de la fase 2 (modelo de barras)

 A continuación, se realizan las operaciones pertinentes.

$$6 + 5 = 11$$

 El último paso, y no por ello el menos importante, es contestar el problema con una oración completa:

*María tiene 11 galletas.*

Se observa cómo el problema queda totalmente ilustrado con un gráfico sencillo que, en el momento de revisarlo, permite identificar con facilidad el procedimiento que se siguió.

# Integración de la fase 2 (modelo de barras)

## Gráficos de resta

Los problemas de resta se caracterizan por conocer el todo y tratar de averiguar una de las partes. Veamos cómo se refleja esto en el gráfico.

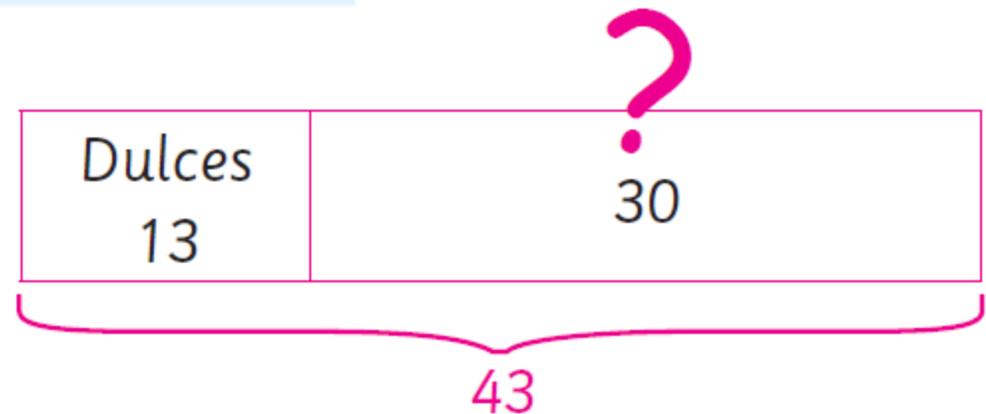
La mamá de Ana le regaló 43 pesos. Si la niña compró unos dulces que costaron 13 pesos, ¿cuánto dinero le queda?

¿De qué se habla?

Dinero

¿De quién se habla?

de Ana



$$43 - 13 = 30$$

Le quedan 30 pesos.

# El modelo en un problema de dos operaciones



El procedimiento comienza con la lectura atenta del enunciado del problema.

María y Juan fueron a la tienda y compraron galletas. Juan compró 6 galletas más que María. Si entre los dos compraron 20 galletas, ¿cuántas compró María?



Después, se decide de qué o de quién se habla en el problema. Si es necesario, se repite la lectura.

¿De qué se habla?

*Galletas*

*Galletas*

¿De quién se habla?

*de María*

*de Juan*



Se dibuja una barra unidad para cada sujeto del problema. Por lo común, la barra unidad es un rectángulo muy sencillo.

# El modelo en un problema de dos operaciones



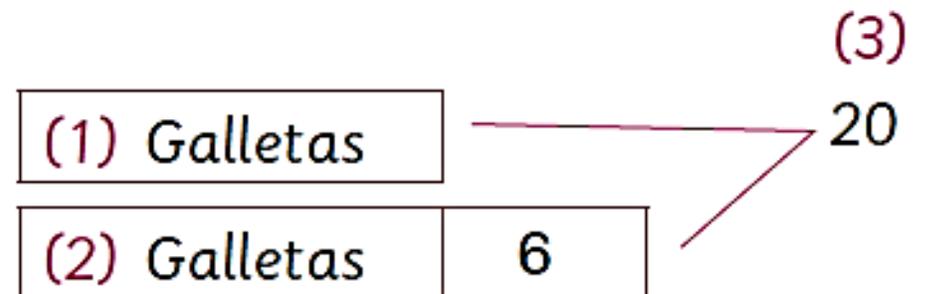
Luego, se lee el problema otra vez, deteniéndose en cada frase o en cada número, si hay más de uno por frase.

- (1) María y Juan fueron a la tienda y compraron galletas.
- (2) Juan compró 6 galletas más que María.
- (3) Si entre los dos compraron 20 galletas, ¿cuántas compró María?



Al mismo tiempo que se lee el problema, se ilustran las barras unidad con la información que se obtiene del problema.

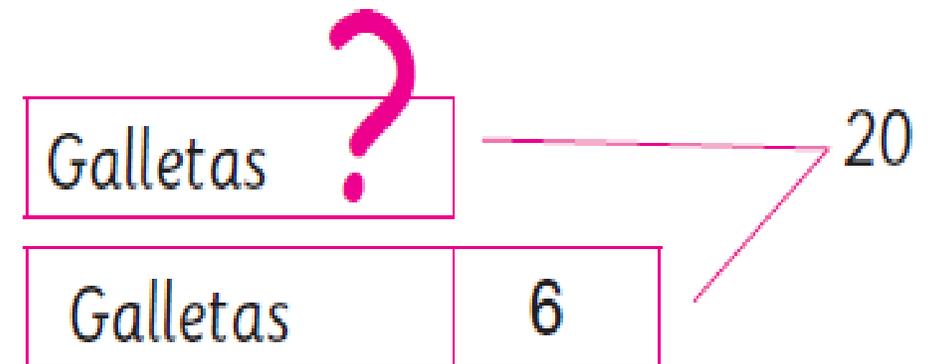
¿De qué se habla?	¿De quién se habla?
Galletas	de María
Galletas	de Juan



# El modelo en un problema de dos operaciones



El siguiente paso consiste en identificar la pregunta del problema e ilustrarla con un signo de interrogación. En este caso, se pregunta sólo por las galletas que compró María.



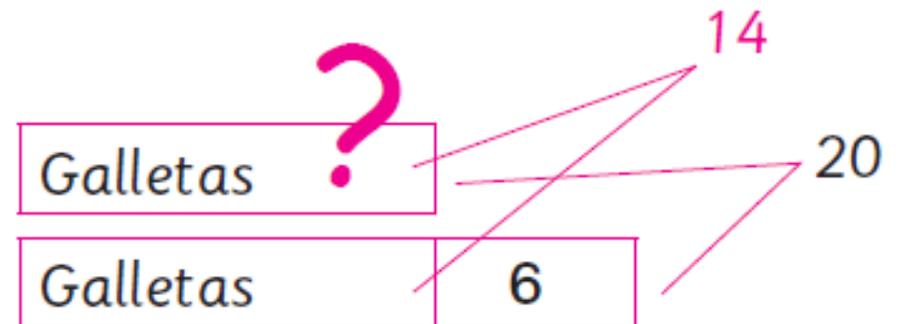
# El modelo en un problema de dos operaciones

⇒ A continuación, se realizan las operaciones pertinentes.

En el ejemplo que nos ocupa, sabemos que Juan y María compraron 20 galletas, pero él compró 6 más que ella; entonces, importa saber cuántas galletas compró cada uno. Dicho de otro modo, se quiere saber, utilizando el gráfico, cuántas galletas representan las barras unidad que tienen la misma longitud.

Para ello, se comienza por restar  $20 - 6 = 14$  y se representa el resultado en el gráfico:

¿De qué se habla?	¿De quién se habla?
Galletas	de María
Galletas	de Juan



# El modelo en un problema de dos operaciones

Es una fase de trabajo con el enunciado verbal del problema.

$$7 + 7 = 14 \quad \text{o} \quad 14 \div 2 = 7$$

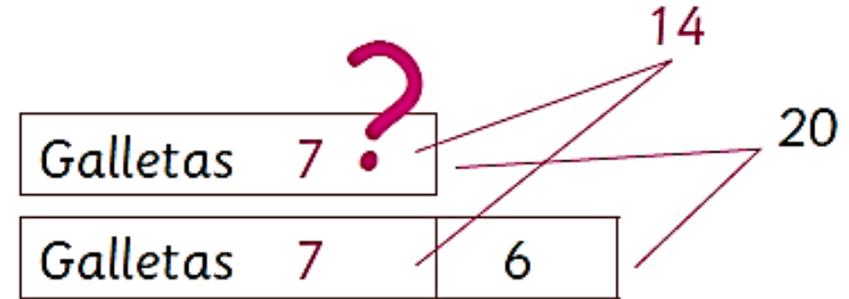
¿De qué se habla?      ¿De quién se habla?

Galletas

de María

Galletas

de Juan



De esta manera, el problema queda totalmente resuelto en el gráfico, pero esto no significa que se haya terminado.



El último paso, y no por ello el menos importante, es contestar el problema con una oración completa:

María compró 7 galletas.



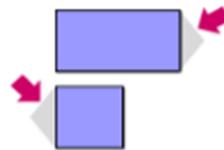
# El modelo de barras en un entorno online: Instrucciones

## Explicación del modelo de barras online.

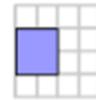
### Blocks



Haz clic y arrastra un bloque al espacio de trabajo



Cambia el ancho del bloque haciendo clic y arrastrando el lado del bloque.



Ancho mínimo: dos cuadrados de la cuadrícula.



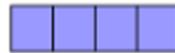
Cambia el color del bloque.



Usa el botón de copiar para duplicar un bloque.



Usa deslizador para dividir un bloque en partes iguales.



Separa las partes.



Ancho mínimo: dos cuadrados de la cuadrícula.



Selecciona dos bloques y los junta.



Corta dos bloques formando partes desiguales.

### More Options



Haz clic y arrastra una etiqueta al espacio de trabajo y escribe palabras o números.



Haz clic y arrastra un segmento al espacio de trabajo y arrastra cualquier de sus extremos para cambiar su longitud. Haz clic una vez para rotar el segmento.



Haz clic en el lápiz para escribir o dibujar en la cuadrícula y en el borrador para borrar lo que hayas dibujado.



Pon y quita la cuadrícula.



Borra un solo objeto arrastrándolo a la papelera.



Limpia el espacio de trabajo.



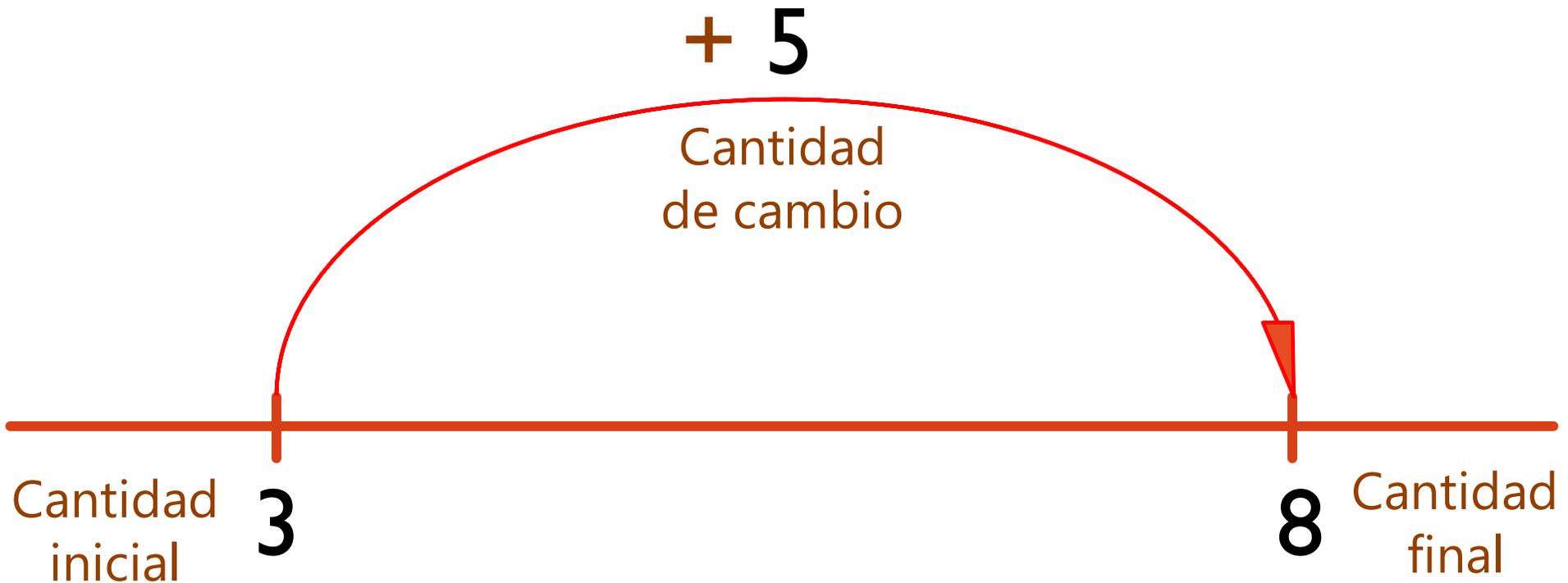
Haz clic en el espacio de trabajo y dibuja un rectángulo alrededor de los objetos que quieras mover.



# Representar problemas de cambio e igualación en la recta numérica

Una alternativa a la modelización con barras, ideal para los problemas de cambio e igualación es la representación en la recta numérica.

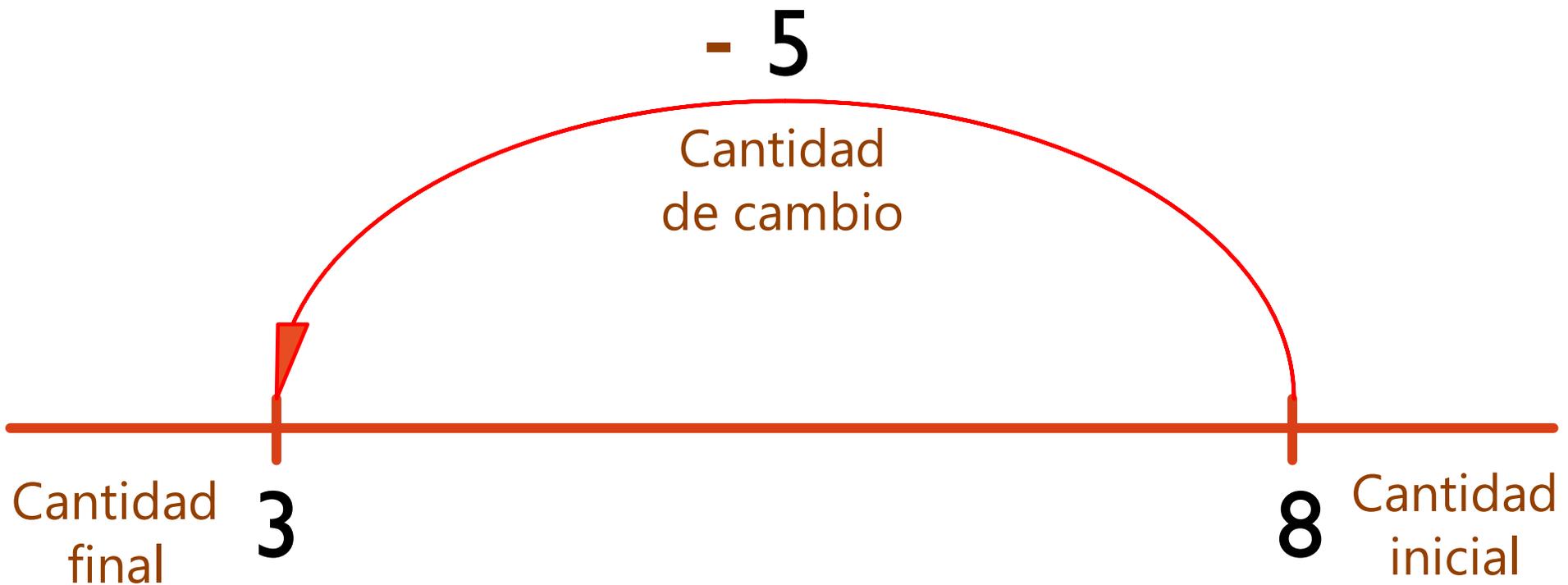
CAMBIO CRECIENTE



# Representar problemas de cambio e igualdad en la recta numérica

Una alternativa a la modelización con barras, ideal para los problemas de cambio e igualdad es la representación en la recta numérica.

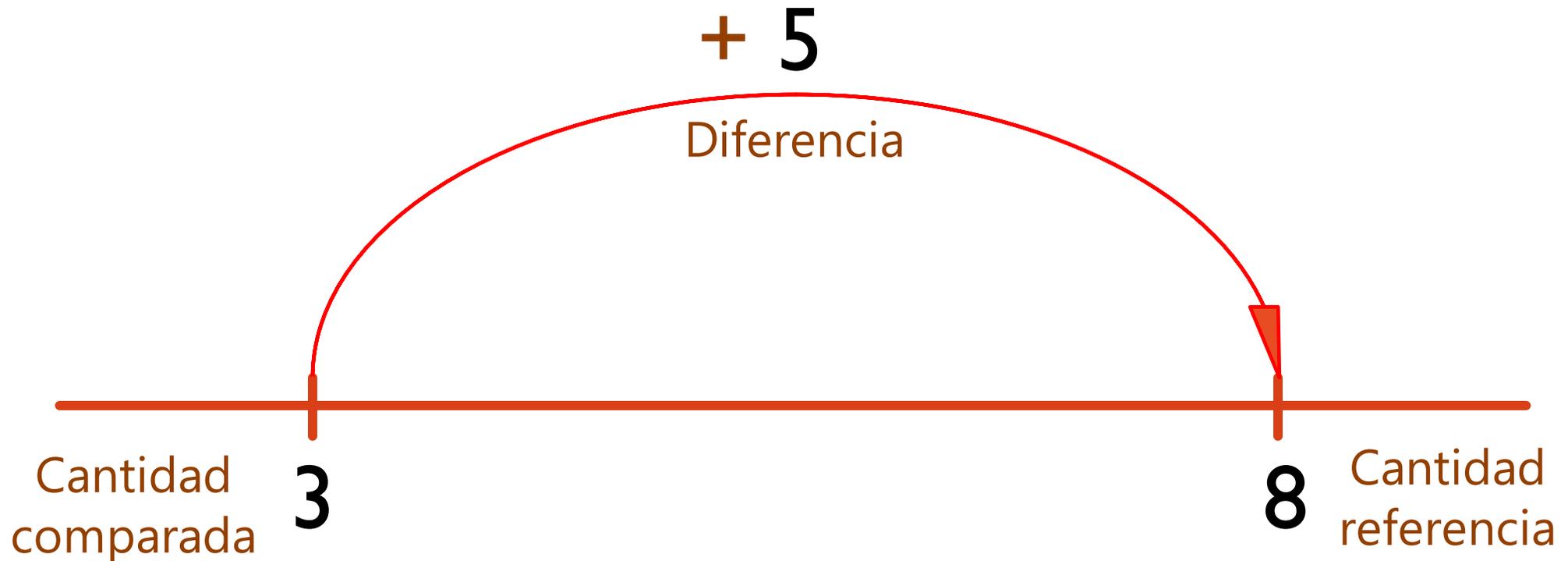
CAMBIO DECRECIENTE



# Representar problemas de cambio e igualación en la recta numérica

Una alternativa a la modelización con barras, ideal para los problemas de cambio e igualación es la representación en la recta numérica.

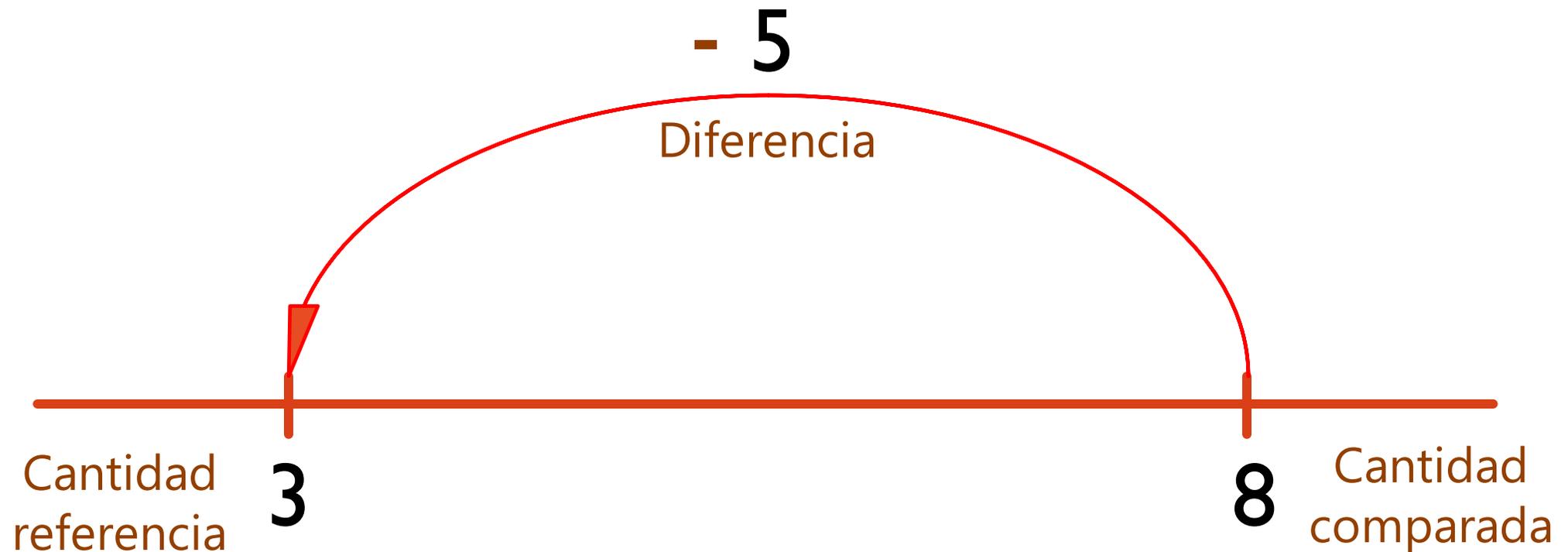
IGUALACIÓN DE CRECIMIENTO



# Representar problemas de cambio e igualdad en la recta numérica

Una alternativa a la modelización con barras, ideal para los problemas de cambio e igualdad es la representación en la recta numérica.

IGUALACIÓN DE DECRECIMIENTO

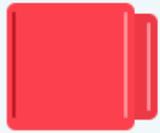




En un partido de baloncesto, el equipo *Euler* llevaba 9 puntos y ganaba por 3 puntos al *Gauss*. ¿Cuántos puntos llevaba el equipo *Gauss*?

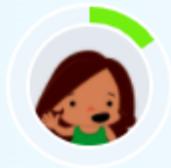


Coloca los puntos que llevaba el *Euler*



Cada cubito representa un punto





En un partido de baloncesto, el equipo *Euler* llevaba 9 puntos y ganaba por 3 puntos al *Gauss*. ¿Cuántos puntos llevaba el equipo *Gauss*?



Gauss llevaba  puntos

1

2

3

4

5

6

7

8

9

0





En un partido de baloncesto, el equipo *Euler* llevaba 9 puntos y ganaba por 3 puntos al *Gauss*. ¿Cuántos puntos llevaba el equipo *Gauss*?



Gauss llevaba  puntos

¿Qué operación hemos realizado para resolver el problema?





En el jardín había una familia de caracoles viviendo. Ayer llovió y llegaron otros 14. Sabiendo que ahora hay 42 caracoles en total... ¿Cuántos caracoles había en el jardín antes de ayer?

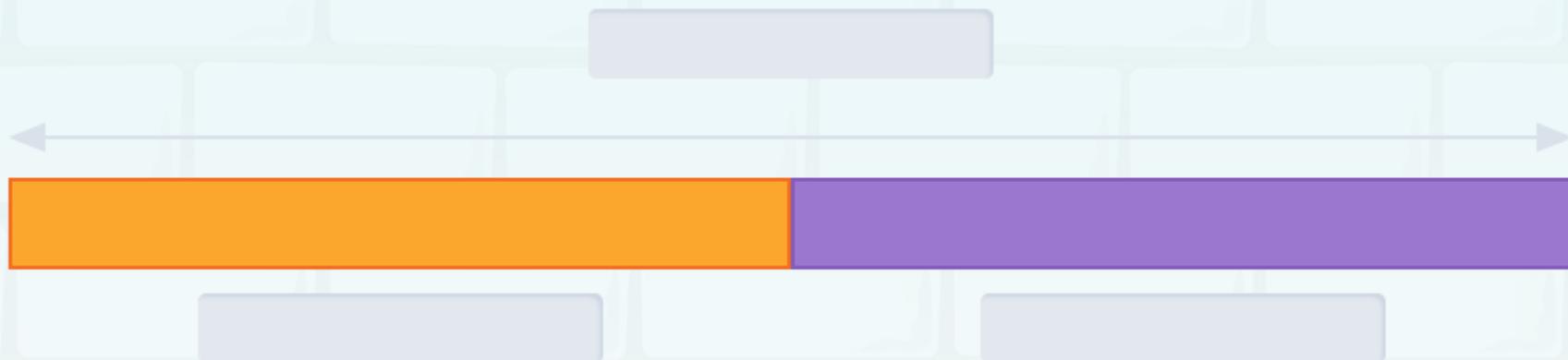
Arrastra las barras.





En el jardín había una familia de caracoles viviendo. Ayer llovió y llegaron otros 14. Sabiendo que ahora hay 42 caracoles en total... ¿Cuántos caracoles había en el jardín antes de ayer?

Arrastra las etiquetas.

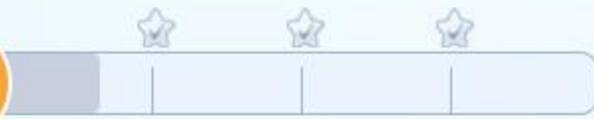


Caracoles que llegaron

Caracoles en total

Caracoles que había

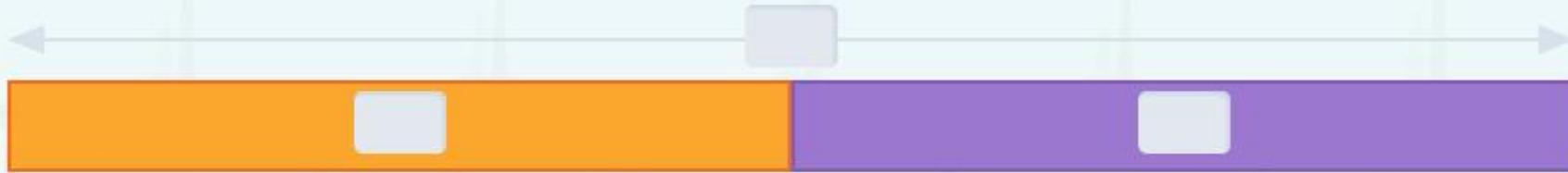




En el jardín había una familia de caracoles viviendo. Ayer llovió y llegaron otros 14. Sabiendo que ahora hay 42 caracoles en total... ¿Cuántos caracoles había en el jardín antes de ayer?

Añade los números.

Caracoles en total



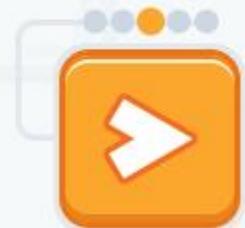
Caracoles que llegaron

Caracoles que había

?

14

42



# Modelo de barras (de Singapur)

Ayer empezaron a hacer una obra en la calle y pusieron 13 baldosas. Si hoy ya había 29 baldosas puestas en total, ¿cuántas baldosas han puesto hoy?



¿Qué operación hay que realizar?

$13 - 29$

$29 + 13$

$29 - 13$



# Modelo de barras (de Singapur)

Carla tiene 15 caramelos y Alfredo tiene 20 más que ella. ¿Cuántos caramelos tiene Alfredo?

Añade los números.



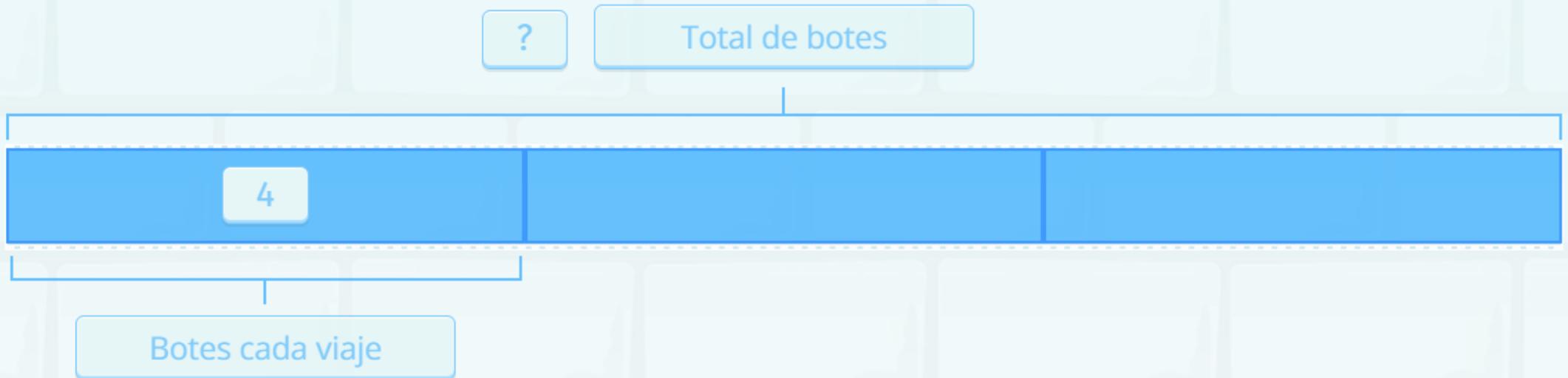
15

20

?

# Modelo de barras (de Singapur)

Blanca recicla el vidrio, en cada viaje al contenedor lleva 4 botes. Cuántos botes ha reciclado esta semana si ya ha ido 3 veces.



¿Qué operación hay que realizar?

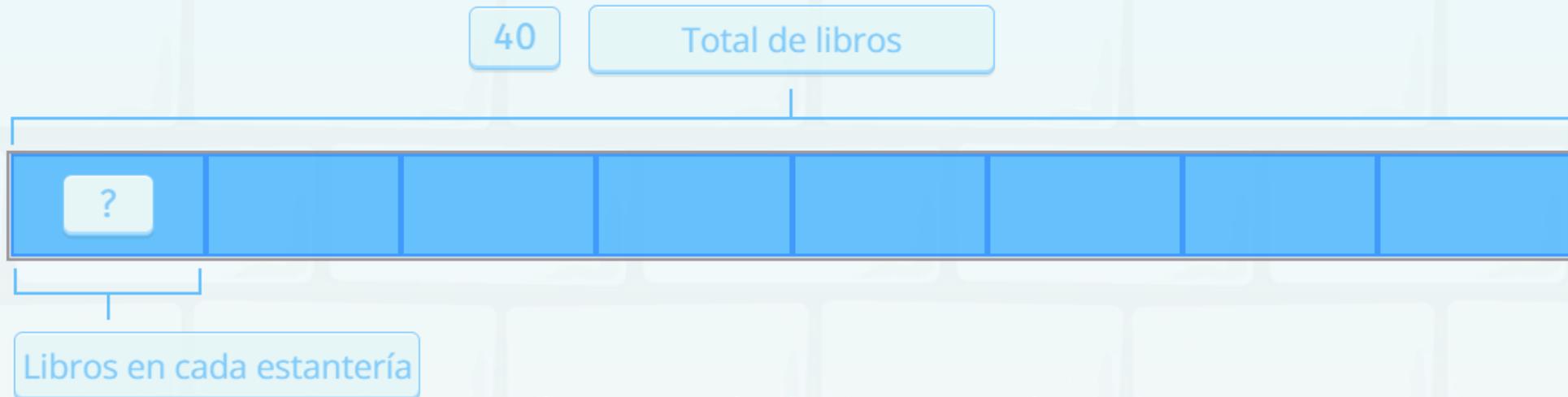
$4 + 3$

$4 \times 3$

$3 - 4$

# Modelo de barras (de Singapur)

En el salón de mi casa hay 40 libros en total colocados en 8 estanterías. Además, en cada estantería hay el mismo número de libros.  
¿Cuántos libros hay en cada estantería?



¿Qué operación hay que realizar?

$5 \times 8$

$5 + 8$

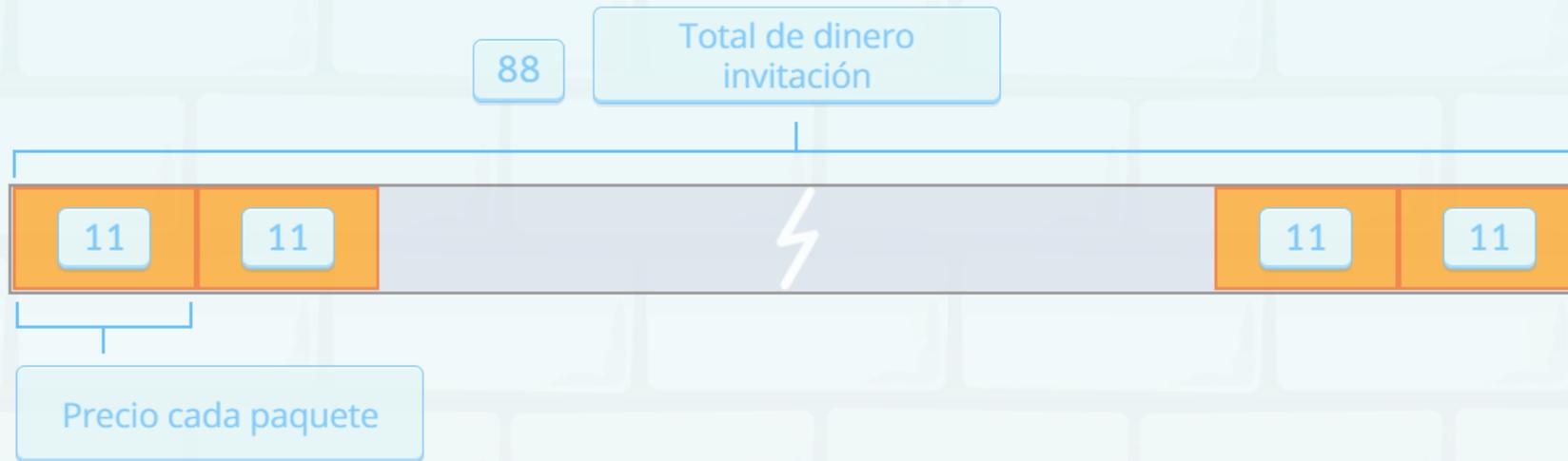
$40 \div 8$



# Modelo de barras (de Singapur)

104

Mi madre va a invitar a sus compañeros del trabajo a cruasanes. Quiere gastarse en invitarles exactamente 88 euros, cada paquete cuesta 11 euros.  
¿Cuántos paquetes comprará?

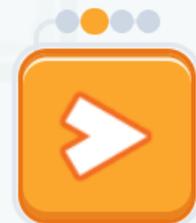


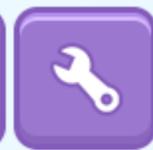
¿Qué operación hay que realizar?

$88 \div 11$

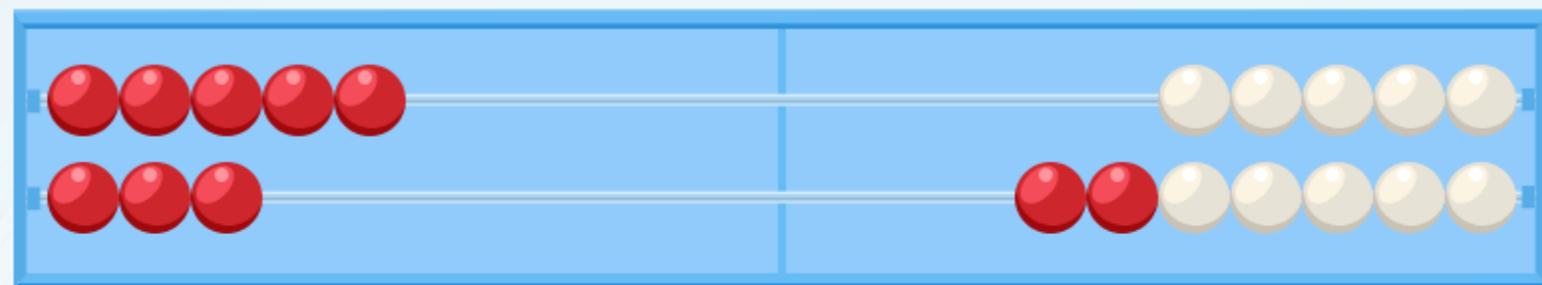
$11 + 8$

$11 \times 8$





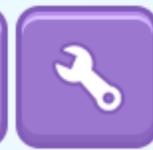
En el partido Levante vs. Real Madrid, el Levante metió 5 goles y el Real Madrid 3. ¿Cuántos goles más que el Real Madrid metió el Levante?



El Levante metió  goles más que el Real Madrid

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 , - ✖

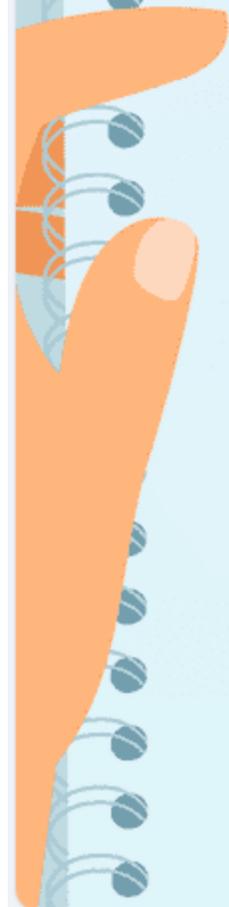




Sabemos que en el zoo hay 2 veces más peces payaso que peces gato y que en total hay 56 peces payaso. ¿Cuántos peces gato hay?

**¿Qué operación tenemos que realizar para resolver el problema?**

Hay



1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



# Contenidos:

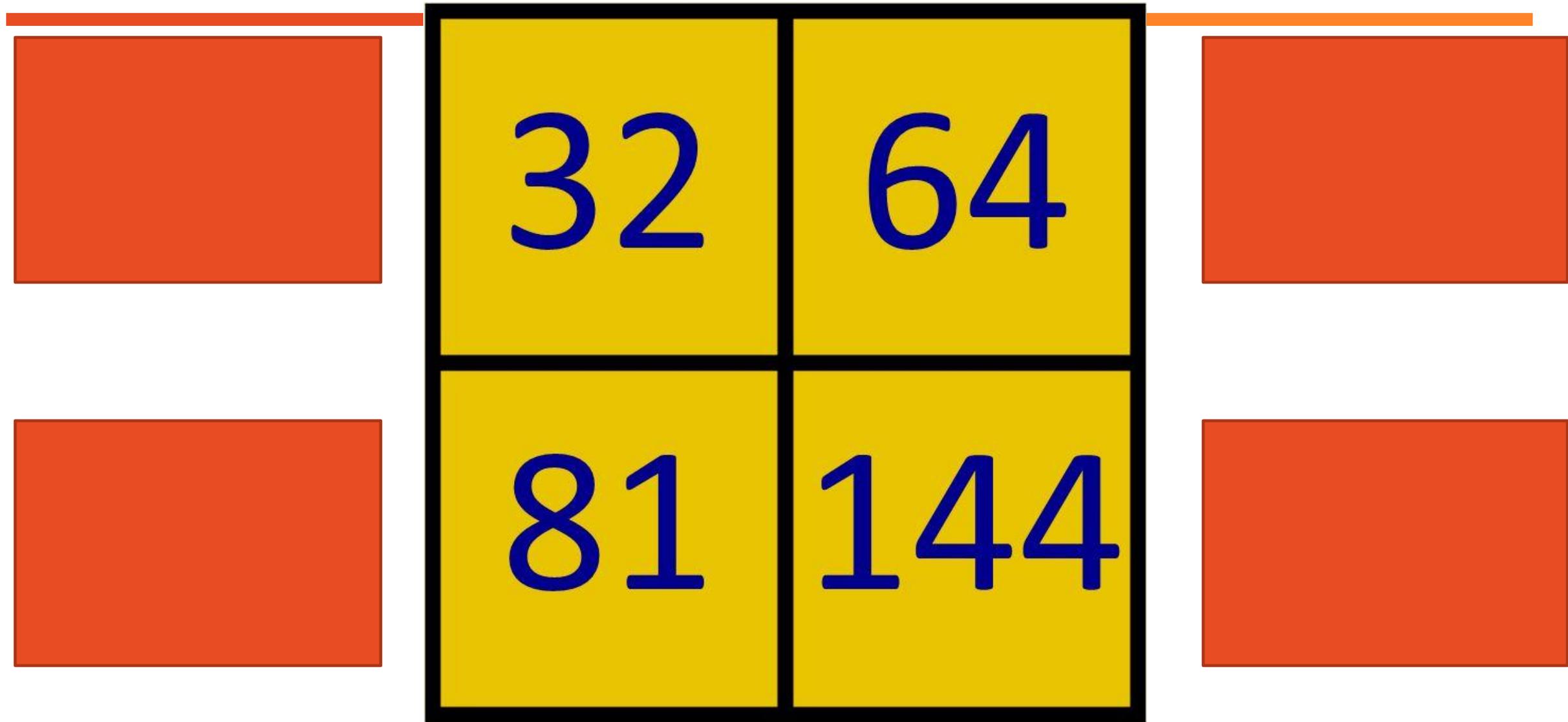
- ¿Por qué resolvemos problemas en matemáticas? ¿Cuándo debemos hacerlo?
- Métodos basados en palabras clave.
- Modelización y metacognición (De estrategias de cálculo/de situaciones-problema)
- Clasificación de los problemas aritméticos verbales.
- Método de fases y barras de Singapur.
- **Más allá de la resolución de problemas:**
  - Problemas abiertos.
  - Problemas con múltiples soluciones.
  - Problemas geométricos y visuales.
  - Otros problemas.
- Se puede utilizar calculadora para resolver problemas y otras preguntas.

*Which*

**One**

**Doesn't**

**Belong?**



# Contenidos:

- ¿Por qué resolvemos problemas en matemáticas? ¿Cuándo debemos hacerlo?
- Métodos basados en palabras clave.
- Modelización y metacognición (De estrategias de cálculo/de situaciones-problema)
- Clasificación de los problemas aritméticos verbales.
- Método de fases y barras de Singapur.
- **Más allá de la resolución de problemas:**
  - Problemas abiertos.
  - **Problemas con múltiples soluciones.**
  - Problemas geométricos y visuales.
  - Otros problemas.
- Se puede utilizar calculadora para resolver problemas y otras preguntas.

---

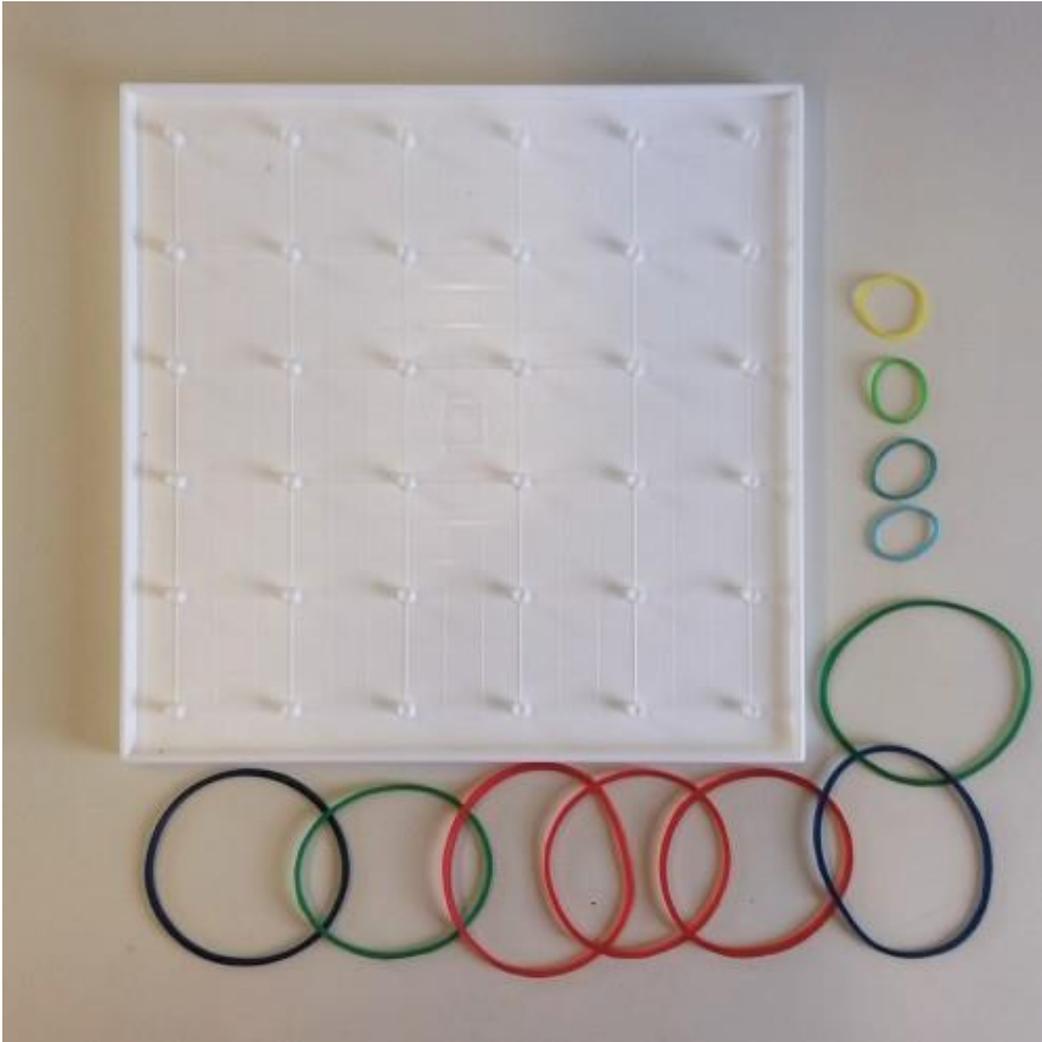
*Julia ha ido al campo y ha visto pajaros y conejos. Ha visto 8 en total.*

*¿Cuántos ha visto de cada clase?*

# Contenidos:

- ¿Por qué resolvemos problemas en matemáticas? ¿Cuándo debemos hacerlo?
- Métodos basados en palabras clave.
- Modelización y metacognición (De estrategias de cálculo/de situaciones-problema)
- Clasificación de los problemas aritméticos verbales.
- Método de fases y barras de Singapur.
- **Más allá de la resolución de problemas:**
  - Problemas abiertos.
  - Problemas con múltiples soluciones.
  - Problemas geométricos y visuales.
  - Otros problemas.
- Se puede utilizar calculadora para resolver problemas y otras preguntas.

# Problemas con múltiples soluciones



¿Cuántos cuadrados distintos puedo hacer en el geoplano?

[Geoplano online](#)

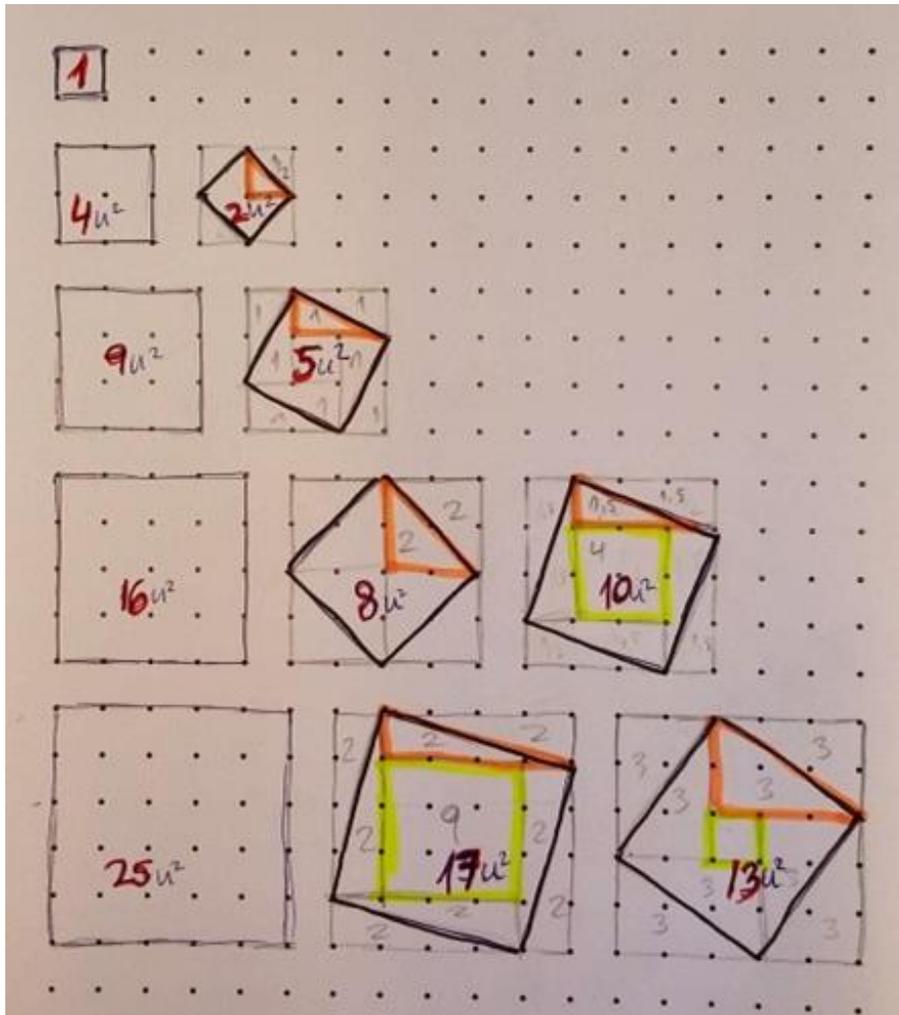
# Problemas con múltiples soluciones



¿Cuántos cuadrados distintos puedo hacer en el geoplano?

[Enlace](#)

# Otros problemas



¿Cuántos cuadrados distintos puedo hacer en el geoplano?

[Enlace](#)

# Problemas con múltiples soluciones

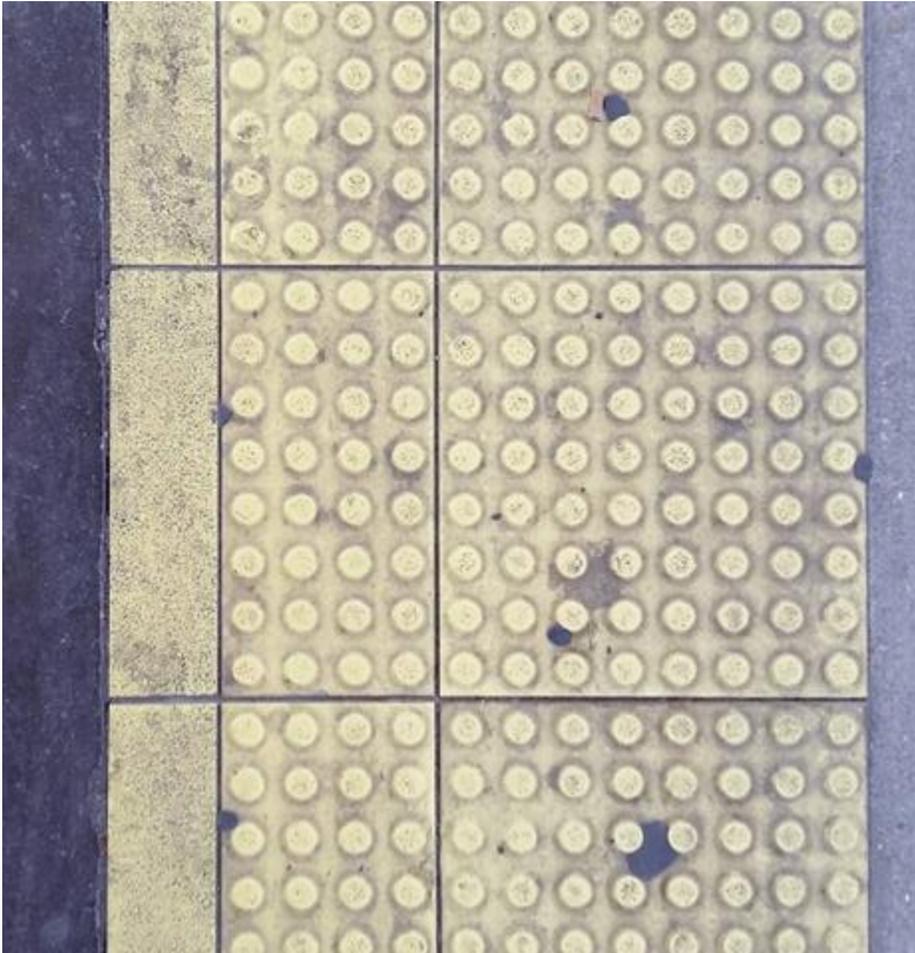
- ¿Cuántos triángulos distintos en geoplano circular?
- ¿Cuadrados con 2, 3, 4, 5, 7 piezas del tangram? ¿Rectángulos?
- Números romanos pares menores que mil con dos “cifras”

# Otros problemas Rectángulos y multiplicaciones



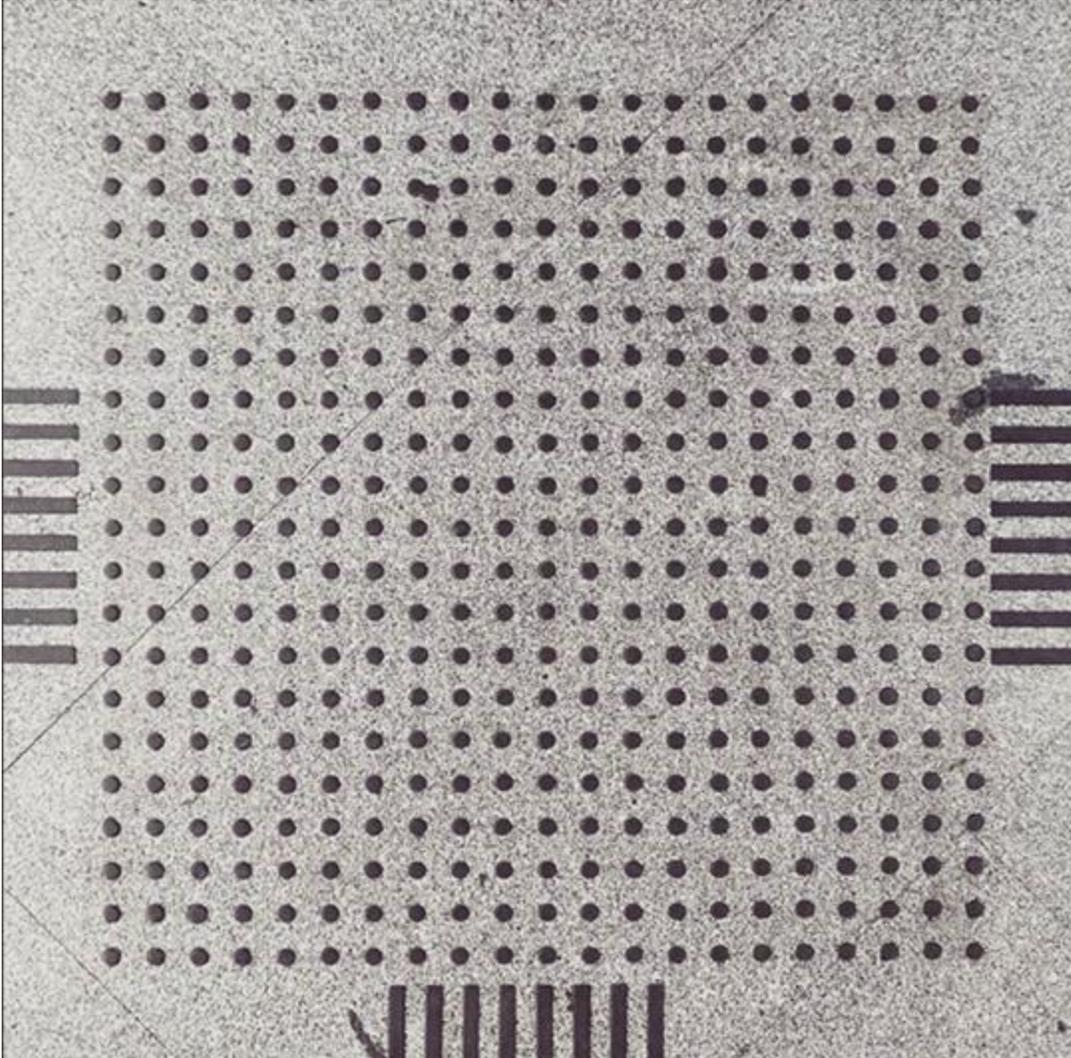
[#SueloMirarAlSuelo](#)

# Otros problemas Rectángulos y multiplicaciones



[#SueloMirarAlSuelo](#)

## Otros problemas



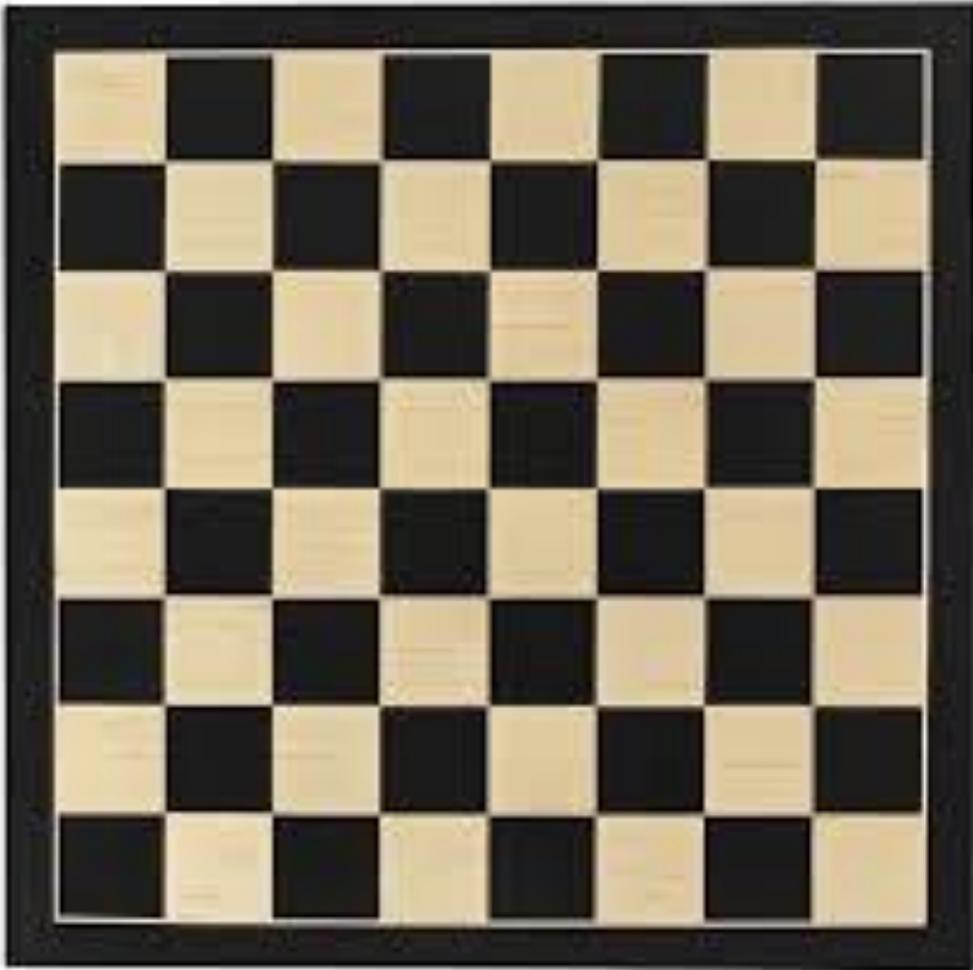
¿Y en un cuadrado de  $6 \times 6$ ?

¿En uno de  $n \times n$ ?

¿Cuántas soluciones se añaden?

[Enlace](#)

## Otros problemas



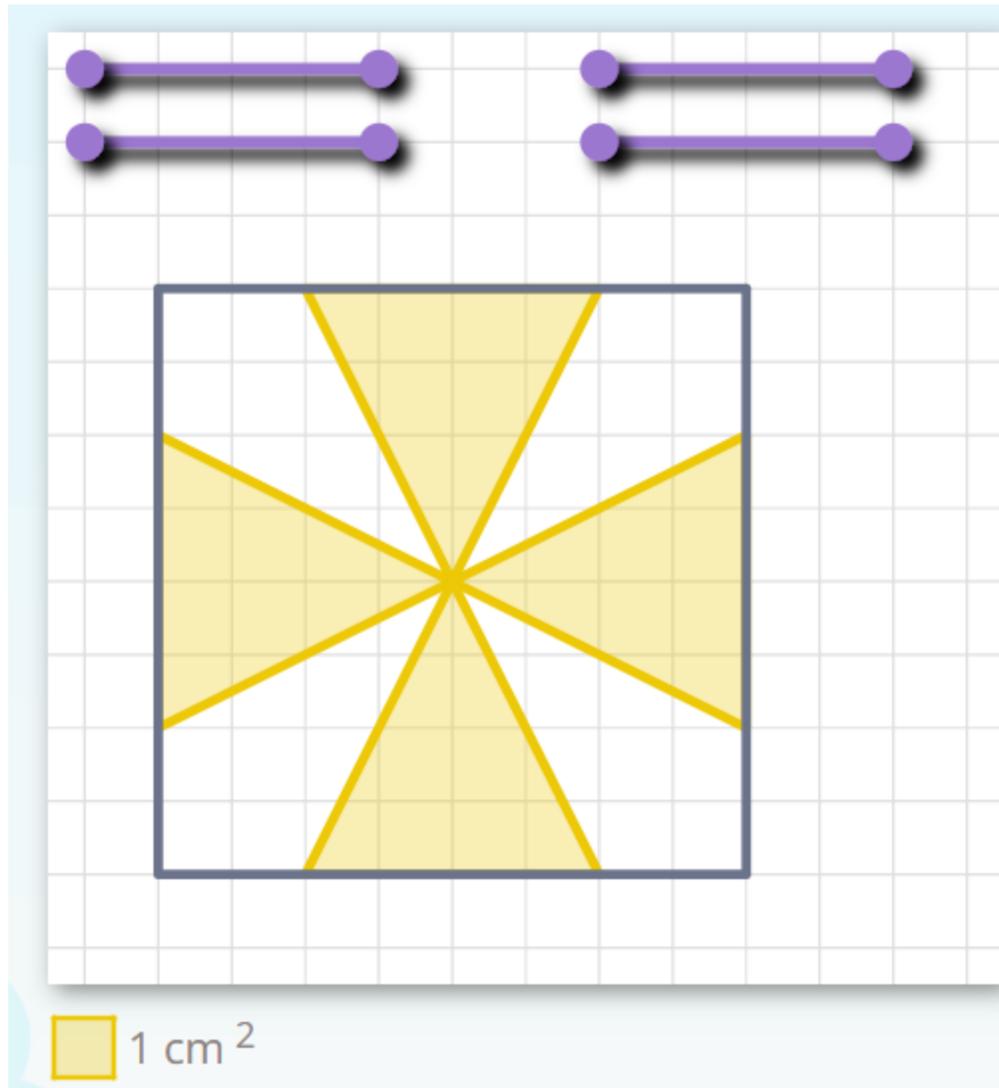
¿Cuántos cuadrados  $1 \times 1$  hay en un tablero de ajedrez?

¿Y de  $2 \times 2$ ?

...

¿Y de  $8 \times 8$ ?

# Otros problemas #WFIS



Puedes calcular el área de una de las partes repetidas y multiplicar por el número de partes.



¿Qué fracción del **cuadrado** está **coloreada**?



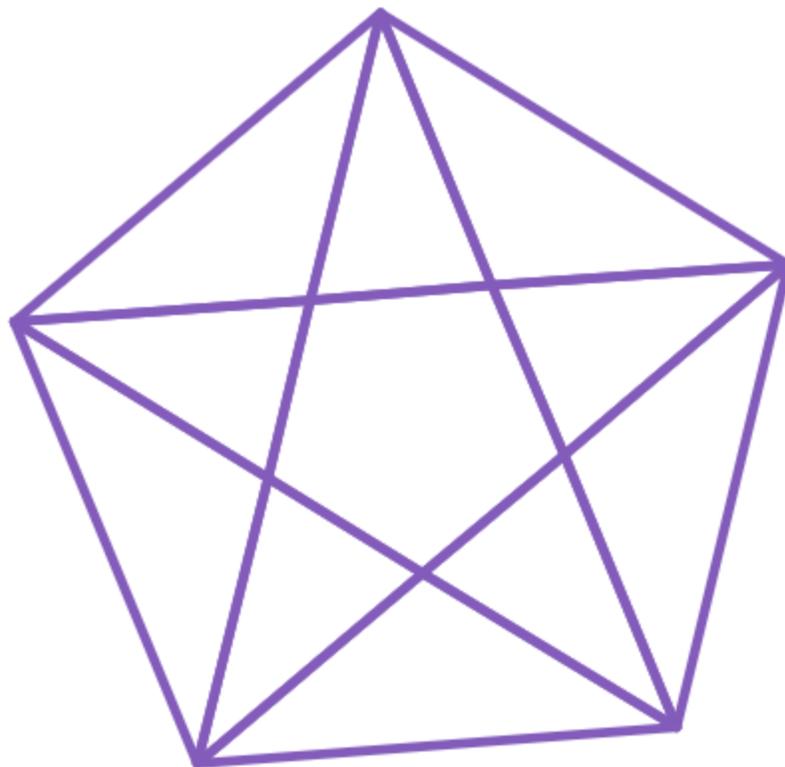
cm<sup>2</sup> coloreados



cm<sup>2</sup> totales

# Otros problemas: enumeración de figuras

¿Cuántos triángulos hay?



# Otros problemas: Tablas-inferencias

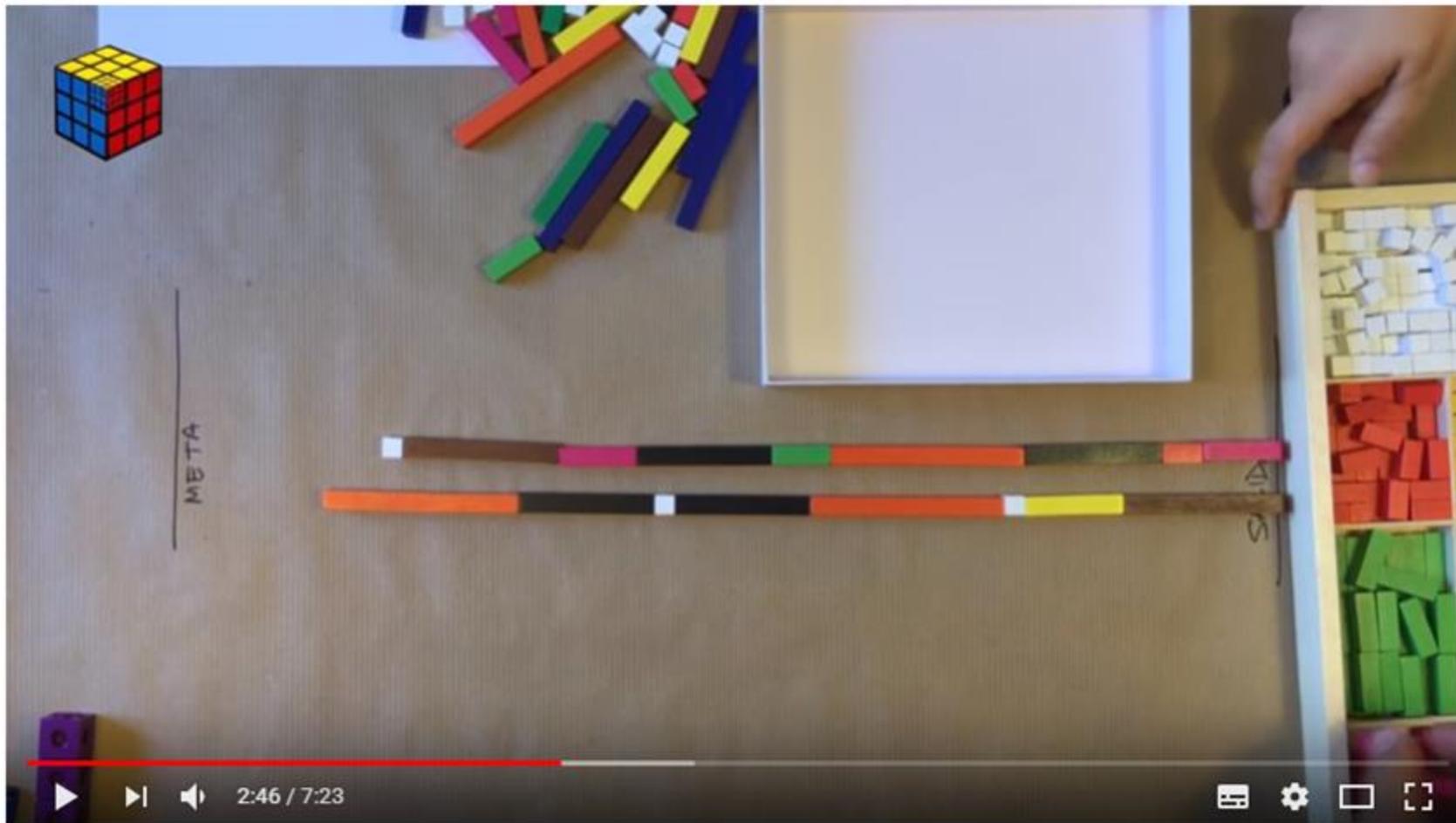
## Acumuladores compulsivos

Ellos se consideran "coleccionistas", pero parientes y amigos de estos tres señores están empezando a preocuparse al ver el volumen de cosas acumuladas. Siga las pistas y entérese de los detalles

- Ernesto, (que no es quien más objetos tiene) acumula periódicos, pero no en el sótano.
- Raúl tiene 300 objetos más que el que guarda su "colección" en el altillo.
- El que tiene menor cantidad de objetos es el acumulador de botellas.
- En el garage de Salvador sólo hay una bicicleta.

		Acumula			En			Cantidad		
		Bolsas plásticas	Botellas	Periódicos	Altillo	Garage	Sótano	1200	1500	1800
Nombre	Ernesto	X	X	0	0	X	X	X	0	X
	Raúl	0	X	X	X	0	0	X	X	0
	Salvador	X	0	X	X	0	0	0	0	X
Cantidad	1200	X	0	0	X	X	0	X	X	X
	1500	0	X	X	X	0	X	0	0	X
	1800	0	0	X	0	X	X	X	X	0
En	Altillo	X	X	0	0	0	0	0	0	0
	Garage	X	0	X	X	X	0	0	0	0
	Sótano	X	0	0	0	0	X	0	0	0

# Una carrera muy rica



# Más problemas ricos NRICH



The image shows a screenshot of the NRICH website. At the top is a dark navigation bar with the NRICH logo on the left, followed by six home icons in different colors (orange, blue, purple, yellow, green, light green). To the right of these icons are the links "Events" and "Donate". Below the navigation bar is a yellow banner with the text "Maths at Home". The main content area is divided into three colored boxes: a green box for "Primary and EY Teachers", a red box for "Secondary Teachers", and a purple box for "Post 16". Each box contains an image, a heading, and a description of resources. The green box features a pile of colorful dice. The red box shows several hot air balloons against a blue sky. The purple box displays a wooden door with a sign that reads "MIND THE STEP".

**NRICH** Events Donate

**Maths at Home**

**Primary and EY Teachers**



**Free** [curriculum-linked resources](#) to develop mathematical reasoning, and problem-solving skills

Find more rich tasks, with teacher support, at the [Primary](#) and [EY](#) teacher homepages

**Secondary Teachers**



**Free** [curriculum-linked resources](#) to develop mathematical reasoning, and problem-solving skills

You can find more rich tasks, with accompanying teacher support, at the [Secondary Teacher Homepage](#)

**Post 16**



**Free** [curriculum-linked resources](#) to develop mathematical reasoning, and problem-solving skills

More resources can be found on the [STEP Support Programme](#) and [Underground Mathematics](#) websites

## Problemas por la calle

¿Podrías encontrar una matrícula de coche que cumpla que la primera cifra por la segunda dé las dos siguientes?



WWW.TOCAMATES.COM



@TOCAMATES

# Otros problemas: Carrera de caballos

<https://docs.google.com/spreadsheets/d/1EI3d3DnEhsusvHccGjjZV98P6dszrm4mZiNYRssG6Co/edit?usp=sharing>



## Otros problemas: Pensamiento computacional

- ¿Qué número menor que 100 tarda más en llegar a 1 haciendo la siguiente regla:
  - Si es par divide entre dos
  - Si es impar, suma uno.

# Contenidos:

- ¿Por qué resolvemos problemas en matemáticas? ¿Cuándo debemos hacerlo?
- Métodos basados en palabras clave.
- Modelización y metacognición (De estrategias de cálculo/de situaciones-problema)
- Clasificación de los problemas aritméticos verbales.
- Método de fases y barras de Singapur.
- Más allá de la resolución de problemas:
  - Problemas abiertos.
  - Problemas con múltiples soluciones.
  - Problemas geométricos y visuales.
  - Otros problemas.
- **Se puede utilizar calculadora para resolver problemas y otras preguntas.**

---

# Conclusiones (entre todos)

- 1<sup>a</sup>



*¿Por qué se deprimió el libro de matemáticas?*

---

*¿Por qué se deprimió el libro de matemáticas?*

*Porque tenía muchos problemas.  
(¡No serían buenos!)*



*Muchas gracias*

*Joseangelmurcia@gmail.com*

*@tocamates*