Materiales elaborados por **Álvaro Vielba Iglesias** y **César Carbajo Olea** para la prueba de Problemas de la II Olimpiada Matemática Alevín de Palencia para alumnos de 6º curso de Primaria. El problema 1 es una reelaboración a partir de otros enunciados y el problema 2 es de creación propia. Los problemas se han redactado en el marco del Grupo de Trabajo: MEJORA DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA DEL ALUMNADO A TRAVÉS DE LA OLIMPIADA MATEMÁTICA

.

PROBLEMA 1. **Llegar a 100**

Aquí tienes un cuadrado dividido en cuatro celdas cuadradas iguales rellenas con cuatro cifras distintas del 1 al 9:

7	2
3	5

Vamos a formar cuatro números de dos cifras: el formado por las dos cifras de la primera fila (72), el formado por las dos cifras de la segunda fila (35), el formado por las dos cifras de la primera columna (73) y el formado por las dos cifras de la segunda columna (25); y vamos a calcular la suma total de los cuatro números: 72 + 35 + 73 + 25 = 205.

(a) Crea tu propio ejemplo y calcula la suma final.

(b) Tu objetivo es llegar a 100, es decir, conseguir que la suma de los números de dos cifras del cuadrado sea exactamente 100. Encuentra un cuadrado en el que la suma sea 100.

(c) Encuentra todos los cuadrados en los que la suma sea 100. ¿Cómo sabes que no hay más?

(*) Es conveniente que expliques tus razonamientos para obtener la mayor puntuación, especialmente en el apartado (c).

Resolución.

(a) Crea tu propio ejemplo y calcula la suma final.

Basta con cumplir las normas que se han establecido: usar cifras del 1 al 9 y no repetir ninguna. Hay muchísimas soluciones. Una puede ser esta:

9	5
1	3

En este caso la suma obtenida es: 95 (1ª fila) + 13 (2ª fila) + 91 (1ª columna) + 53 (2ª columna) = 252

(b) Tu objetivo es llegar a 100, es decir, conseguir que la suma de los números de dos cifras del cuadrado sea exactamente 100. Encuentra un cuadrado en el que la suma sea 100.

(c) Encuentra todos los cuadrados en los que la suma sea 100. ¿Cómo sabes que no hay más?

Vamos a resolver estos apartados de manera conjunta. El objetivo es que, con las normas impuestas, la suma obtenida sea 100. Parece que probando un poco y haciendo algunos ajustes no será muy complicado. No es tan sencillo como parece, así que vamos a ser sistemáticos para llegar a alguna solución (si la hay); es más, vamos a obtener todas.

Si dedicamos un poco de tiempo a hacer varios cuadrados observamos que el número que está en la esquina superior izquierda no puede ser muy grande. Este número juega el papel de decena del número de la primera fila y del número de la segunda columna. Por lo tanto, su mayor valor, a priori va a ser 4. Si fuese 5 ya estaríamos acumulando dos veces 50. Nos pasaríamos de 100.

Pensando en qué papel juega cada cifra del cuadrado en cada uno de los cuatro números formados llegamos a las siguientes conclusiones:

- Esquina superior izquierda: Es decena del número de la 1ª fila y del número de la 1ª columna.

- Esquina superior derecha: Es decena del número de la 2ª columna y unidad del número de la 1ª fila.

- Esquina inferior izquierda: Es decena del número de la 2ª fila y unidad del número de la 1ª columna.

- Esquina inferior derecha: Es unidad del número de la 2ª fila y del número de la segunda columna.

Otra cosa que podemos tener en cuenta es que 100, la suma que queremos obtener es un número par. La paridad de la suma de los cuatro números viene determinada por las cifras de las unidades.

La cifra de la esquina inferior derecha la sumamos dos veces como unidad. Esto va a generar un número par, pues dos veces un número da como resultado un número par sea cual sea el número.

Si las cifras de la diagonal secundaria (esquina superior derecha y esquina inferior izquierda) son las dos pares o las dos impares, al sumar estas cifras como unidades vamos a obtener un número par. Si tienen distinta paridad vamos a obtener un número impar (basta pensar que PAR + PAR = PAR; IMPAR + IMPAR =PAR; PAR + IMPAR = IMPAR).

Finalmente, al sumar las cuatro unidades (los cuatro números) vamos a obtener:

- Un número par si las dos cifras de la diagonal secundaria tienen la misma paridad.

- Un número impar si las dos cifras de la diagonal secundaria tienen distinta paridad.

Juntando todas estas conclusiones vamos a ser sistemáticos, como decíamos al principio. Comenzaremos poniendo un 4 en la esquina superior izquierda. Es lo máximo que podemos poner

4	¿1?
¿2?	¿?

- **4 en la esquina superior izquierda:** Esta cifra juega dos veces el papel de decena, así que acumularíamos 40 + 40 = 80. Lo menos que podemos poner en las casillas de la diagonal secundario es 1 y 2, da igual en qué orden. Como estas juegan una vez el papel de decena acumularíamos otros 10 y otros 20. Nos pasamos. <u>No se puede poner un 4.</u>

- **3 en la esquina superior izquierda:** Acumularíamos 30 + 30 = 60. En las casillas de la diagonal secundaria como mucho podemos poner un 2, pues con un 4 acumularíamos otros 40 y 3 ya lo hemos puesto. Si ponemos un 2 en una de estas casillas en la otra solo podremos poner un 1. Son números de distinta paridad, por lo tanto, la suma no va a ser 100, un número par. <u>No se puede poner un 3</u>.

3	¿1?
¿2?	

- **2 en la esquina superior izquierda:** De entrada, acumularíamos 20 + 20 = 40.

  - Como mucho podemos poner un 5 en una de las casillas de la diagonal secundaria. Si ponemos un 5 la otra casilla de la diagonal secundaria como poco será 1, que acumula 10 por ser decena de uno de los dos números. 50 + 10 = 60. Con los 40 que ya llevamos nos pasamos. Tampoco podemos.

  - No podemos poner un 4 en la diagonal secundaria. Tendría que ir emparejado con 2, como la otra cifra de la diagonal secundaria, para que la suma total sea par, pero ya hemos puesto el 2.

- Si ponemos un 3 en la diagonal secundaria por lo ya analizado su pareja (de la misma paridad) tiene que ser un 1. Llevaríamos acumulado 20 + 20 + 30 +10 +3 +1 = 84. Recordamos que las cifras de la diagonal secundaria juegan el papel de decena una vez y de unidad otra. Nos faltan 16 para llegar a 100. La cifra de la esquina inferior derecha juega dos veces el papel de unidad, es decir, acumula dos veces su valor, por lo que esta cifra ha de ser 8.

Hay dos cuadrados que suman 100 con un 2 en la casilla "de inicio", ya que no importa el orden de las dos cifras que forman parte de la diagonal secundaria:

2	1
3	8

2	3
1	8

- **1 en la esquina superior izquierda:** De entrada, acumularíamos 10 + 10 = 20.

  - La cifra más grande que puede formar parte de la diagonal secundaria es un 6. Si ponemos un 7 su acompañante va a ser mínimo un 2 y nos vamos a pasar. Con un 6 la otra cifra de la diagonal secundaria solo puede ser un 2 (por motivos de paridad), pero, en ese caso, vamos a acumular 60 + 20 a lo que ya tenemos y nos pasamos.

  - No podemos poner un 5 en la diagonal secundaria porque su acompañante será 3 y también nos vamos a pasar.

  - Nos quedan el 4 y el 2. Acumularíamos 40 + 20 + 4 +2 = 66. Con los 20 que llevábamos de entrada hacen 86. Nos quedan 14 por añadir. Lo conseguimos con un 7 en la casilla restante.

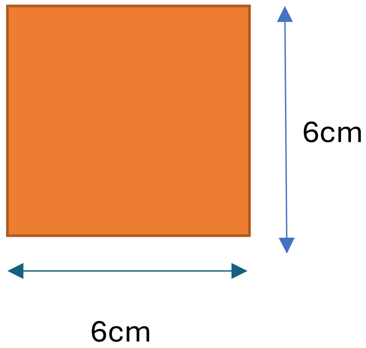
De nuevo, obtenemos dos cuadrados según el orden en que coloquemos las cifras de la diagonal secundaria ¡Hay cuatro cuadrados que suman 100!

1	4
2	7

1	2
4	7

PROBLEMA 2. Un problema de galletas

Una conocida fábrica palentina elabora galletas de dos tamaños, GRANDES y pequeñas, a partir de masas cuadradas de 6 cm de lado.



Para realizar 100 masas cuadradas de 6 cm de lado se necesitan los siguientes ingredientes:

250 gramos de mantequilla

150 gramos de azúcar

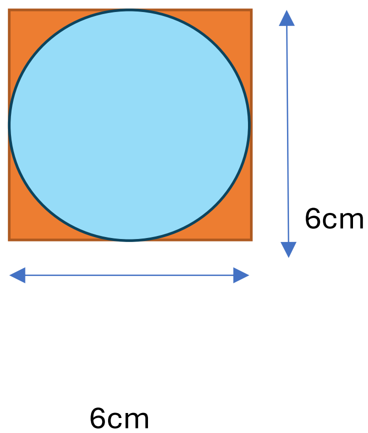
4 huevos

500 gramos de harina

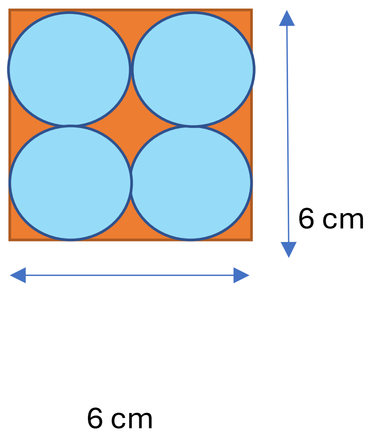
5 ml de esencia de vainilla

Las galletas tienen forma circular y se realizan usando moldes como los que se ven en las figuras siguientes.

GALLETA GRANDE



GALLETAS PEQUEÑAS



a) Calcula la masa que sobra al elaborar una galleta grande. Redondea el resultado a las décimas (de cm^2).

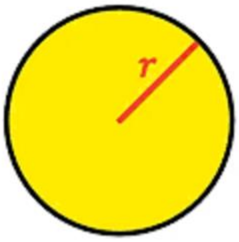
b) ¿Sobra más masa si realizo una galleta grande o cuatro galletas pequeñas? Razona la respuesta.

c) Los trozos de masa sobrante se reutilizan para hacer nuevas láminas cuadradas de 6 cm de lado. ¿Cuántas galletas grandes tendré que fabricar para conseguir una masa nueva a partir de los trozos sobrantes?

d) Una caja de galletas grandes contiene 50 galletas. Si queremos realizar 20 cajas de galletas grandes, ¿cuantos huevos necesitamos?

e) Queremos hacer una galleta **supergrande**. Para ello necesitamos masas cuadradas de 12 cm de lado. Si usamos la misma proporción para elaborar la masa, ¿qué cantidad de harina necesitaríamos para realizar 100 masas de 12 cm de lado?

ÁREAS DEL CÍRCULO Y CUADRADADO



$A = \pi \cdot r^2$

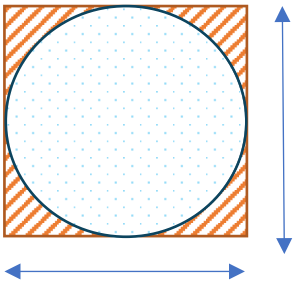
$\boxed{A = \text{lado} \times \text{lado}}$

π = 3,14 (aproximadamente)

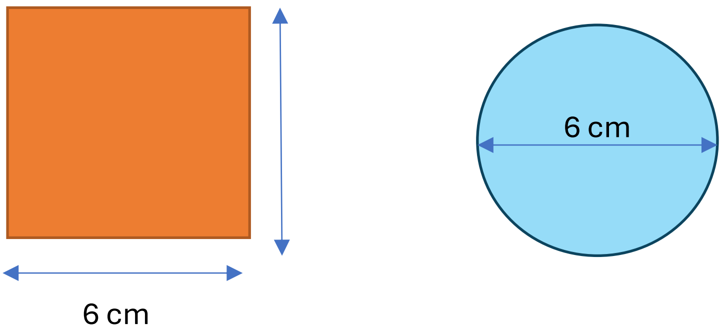
r radio

Resolución

a) Buscamos el área de la siguiente zona rayada, que sería el sobrante de la galleta.



Se trata de restar el área de un cuadrado de lado 6 y el área de un círculo de radio 3 (el radio es la mitad del diámetro , que sería 6)



Área del cuadrado= 6 x 6=36 cm^2

Área del círculo = π x 3^2= 3,14 x 9= 28,26 cm^2

Restando ambas cantidades obtenemos

36 - 28,26 = 7,74 cm^2

Tanto si redondeamos el área del círculo como si redondeamos la resta final, la solución debería der **7,7 cm^2**

b) El objetivo último de esta pregunta es intuir las relaciones entre el lado y el área de estas figuras geométricas. Si multiplicamos por 2 el lado de un

cuadrado o de un círculo, el área se multiplica por 4 y si dividimos el lado entre 2, el área se divide entre 4.
Como el radio de una galleta grande es el doble que el de la galleta pequeña, el resultado final será el mismo y sobrará la misma cantidad de masa.

$$\frac{lado}{2} x \frac{lado}{2} = \frac{ladoxlado}{4} \qquad \pi \text{ x } \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi x r^2}{4}$$

La galleta pequeña tiene diámetro 3 y por tanto su radio sería 1,5

Las cuentas nos quedarían

Área círculo pequeño = π x $1{,}5^2$= 3,14 x 2,25 = 7,0625 cm^2

Como hay 4 círculos pequeños correspondientes a las 4 galletas pequeñas, entonces

4 x 7,0625 = 28, 26 cm^2

Y efectivamente la cantidad sobrante es la misma.

c) Al dividir obtenemos la cantidad de masas sobrantes para realizar una lámina nueva.

36 : 7,74 = 4,65… aproximadamente

Por tanto harían falta 5 restos de masas para conseguir una masa nueva.

d) Debemos seguir suponiendo que se reutilizan los restos de las galletas, si no fuera así el ejercicio se simplifica bastante y se haría de la siguiente forma

50 galletas x 20 cajas de galletas = 1000 galletas, es decir necesito 1000 masas cuadradas. Como según la receta con 4 huevos se realizan 100 masas, necesitaremos
4 x 10 = 40 huevos para las 1000 masas

Si tenemos en cuenta que se reutilizan los restos de los cuadrados, la solución se complica. Como vimos en el apartado anterior, con aproximadamente 4,65 restos de masas cuadradas se elabora una nueva masa. Podemos abordar la solución utilizando ese dato aproximado de 4,65 o tomar el valor 5. El asunto es complejo, puesto que en ese proceso de reutilizado, se generan nuevos restos que podrían ser a su vez reutilizados.

Tampoco se dice en el enunciado si las masas se elaboran de 100 en 100 o son posibles cantidades menores de fabricación. Esta ambigüedad nos parece interesante, para que el alumno/a que sea capaz de llegar a ese punto a través de su razonamiento, comprenda la diversidad de factores y variables que configuran el mundo real, así como

las diferentes estrategias de acción que podrían generar múltiples soluciones.

Tomando el valor redondeado 5 y sin posteriores reutilizaciones, podríamos dar una solución suponiendo que por cada 5 masas obtendremos 6 galletas, ya que con 5 restos de masas cuadradas, obtenemos una nueva masa cuadrada.

5 masas darían 6 galletas

Para conseguir 1000 galletas, necesitaría $\frac{1000}{6} x$ 5 masas

$\frac{1000}{6} x$ 5= 833,33 masas

Suponiendo que las masas se realizan de 100 en 100, se necesitarían 900 masas.

Con 4 huevos realizamos 100 masas, luego se necesitarían 4 x 9 = 36 huevos

Existen más soluciones según la complejidad con la que queramos abordar el problema

Si reutilizamos los restos se podría conseguir las 1000 galletas a partir de 800 masas.

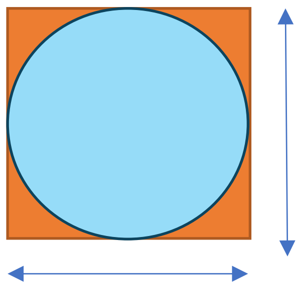
$$\frac{800}{5} = 160, \quad \frac{160}{5} = 32 \quad \frac{32}{5} = 6,4 \quad \frac{6}{5} = 1,2$$

800+160+32+6+1=999

Y si tenemos en cuenta que no son exactamente 5, sino que hay bastantes más restos, se conseguirían las 1000 galletas con 800 masas.

Conocer el número mínimo exacto requeriría un enunciado más preciso y no es el objetivo de la prueba.

e) Galleta súper grande



12 cm

12 cm

Como decíamos en el apartado b, duplicar lado implicará que el área se multiplique por 4

Como para elaborar 100 masas de 6 cm de lado se necesitan 500 gramos de harina, para elaborar 100 masas de 12 cm de lado se necesitarán 500 x 4 = 2000 gramos.